க.பொ.த. (உ.தர)ப் பரீட்சை - 2012

மதிப்பீட்டு அறிக்கை

10 - இணைந்த கணிதம்

Curriculum
Assessment & Evaluation
Teaching Learning
N E T S

ஆய்வு அபிவிருத்திக் கிளை
தேசிய மதிப்பீட்டிற்கும் பரீட்சித்தலுக்குமான சேவை
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த. (உ.தர)ப் பரீட்சை - 2012

மதிப்பீட்டு அறிக்கை

10 - இணைந்த கணிதம்

ஆய்வு அபிவிருத்திக் கிளை
தேசிய மதிப்பீட்டிற்கும் பரீட்சித்தலுக்குமான சேவை
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

இணைந்த கணிதம்

மதிப்பீட்டு அறிக்கை - க.பொ.த. (உ.தர)ப் பரீட்சை - 2012

நிதி அனுசரணை

எதிர்கால அறிவை மையமாகக் கொண்டு பாடசாலை
கல்விமுறைமையை மாற்றியமைக்கும் செயற்றிட்டம்
(TSEP - WB)

அறிமுகம்

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர உயர் தரப் பரீட்சையானது இலங்கையின் உயர்மட்ட இரண்டாம் நிலைக் கல்வியின் இறுதிச் சான்றிதழ்ப் பரீட்சையாகும். உயர்மட்ட இரண்டாம் நிலைக் கல்வியின் இறுதியில் மாணவர்களின் அடைவு மட்டத்தைச் சான்றுப்படுத்தல் இப் பரீட்சையின் முக்கிய நோக்காக இருந்த போதும் தேசிய பல்கலைக்கழகங்கள், வேறு கல்வி மற்றும் தொழில் பயிற்சி நிறுவனங்கள், தேசிய கல்வியியல் கல்லூரிகள் என்பவற்றுக்குத் தகைமையானோரைத் தெரிவு செய்தலும் இப்பரீட்சையின் பெறுபேறுகளின் அடிப்படையில் இடம்பெறுவதால் அடைவுப் பரீட்சையாகவும் தேர்வுப் பரீட்சையாகவும் க.பொ.த (உ.தர)ப் பரீட்சை மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்த தன்மையைப் பெறுகிறது. மேலும் மூன்றாம் நிலையில் தொழிலில் பிரவேசிப்பதற்கான தகைமையை சான்றுப்படுத்தும் பரீட்சையாகவும் இது ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகின்றது. இப்போது இப்பரீட்சைக்காக 2012 ஆம் ஆண்டில் 196,954 வரையிலான பாடசாலைப் பரீட்சார்த்திகளும் 10,954 வரையிலான தனிப்பட்ட பரீட்சார்த்திகளும் தோற்றியிருந்தனர்.

இப்பரீட்சையில் உயர் அடைவு மட்டத்தைப் பெறுவதற்காக மாணவர்களும் அவர்களின் எதிர்பார்ப்புகளை நிறைவு செய்வதற்காக ஆசிரியர்களும் பெற்றோரும் பெரிதும் முயற்சி செய்கின்றனர். இந்த மதிப்பீட்டு அறிக்கையை அவர்களின் அந்த எதிர்பார்ப்புக்களை நிறைவேற்றுவதற்கு உதவும் பொருட்டே இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் தயாரித்துள்ளது. இந்த மதிப்பீட்டு அறிக்கையில் உள்ளடக்கப்பட்ட தகவல்கள் பரீட்சையை எதிர்பார்த்திருப்போர், ஆசிரியர்கள், அதிபர்கள், ஆசிரிய ஆலோசகர்கள், பாடப் பொறுப்புக் கல்விப் பணிப்பாளர்கள், பெற்றோர், கல்வி ஆய்வாளர்கள் அனைவருக்கும் பயன்படும் என்பதில் ஐயமில்லை.

இந்த மதிப்பீட்டு அறிக்கை I, II, III என மூன்று பகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது.

க.பொ.த (உ.தர) இணைந்த கணித பாடத்தின் நோக்கம், பாட அடைவு பற்றிய தகவல்கள் இந்த அறிக்கையின் பகுதி I இல் அடங்கியுள்ளது. இப்பகுதியில் பாடத்திற்கு தோற்றிய பரீட்சார்த்திகளின் எண்ணிக்கை, அவர்கள் தரங்களைப் பெற்றுள்ள விதம், மாவட்ட மட்டத்தில் பாடசாலைப் பரீட்சார்த்திகள் தரங்களைப் பெற்றுள்ள விதம், வகுப்பாயிடைக்கேற்ப புள்ளிகளின் பரம்பல் ஆகிய பாட அடைவு பற்றிய புள்ளிவிபரத் தகவல்களும் இணைந்த கணித பாடத்தின் பாடத்தின் வினாப்பத்திரம் I, II என்பவற்றில் வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்பட்ட விதம், அவ்வினாக்களுக்கும் அவ்வினாக்களின் பகுதிகளுக்கும் புள்ளிகள் பெற்றுள்ள விதம் என்பன பற்றி விரிவாகக் குறிப்பிடும் பாட அடைவு பற்றிய பகுப்பாய்வும் உள்ளடக்கப்பட்டுள்ளன. க.பொ.த (உ.தர)ம் - 2012 பரீட்சையில் இணைந்த கணித பாடத்தின் வினாப்பத்திரம் I, II என்பவற்றுக்கான வினாக்கள் அவ்வினாக்களுக்கு பரீட்சார்த்திகள் விடைகள் அளித்திருந்தமை பற்றிய தகவல்கள் இந்த அறிக்கையின் பகுதி II இல் அடங்கியுள்ளன. அதில் வினாப்பத்திரம் I, II என்பவற்றின் வினாக்களுக்கு எதிர்பார்க்கப்பட்ட விடைகள், புள்ளி வழங்கும் திட்டம், விடைகள் அளித்தமை பற்றிய அவதானிப்புக்கள், முடிவுகள், பாட அடைவை மேம்படுத்துவதற்கான ஆலோசனைகள் என்பனவும் உள்ளடக்கப்பட்டுள்ளன.

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களத்தின் ஆய்வு அபிவிருத்திக் கிளை மூலம் விடைத்தாள் மதிப்பீட்டில் ஈடுபட்ட பிரதம பரீட்சகர், மேலதிக பிரதம பரீட்சகர், உதவிப் பரீட்சகர்கள் ஆகியோரால் முன்வைக்கப்பட்ட தகவல்கள், அவதானிப்புகள், கருத்துகள், ஆலோசனைகள், மரபு ரீதியான சோதனைக் கோட்பாடு (Classical Testing Theory) மற்றும் உருப்படித் துலங்கல் கோட்பாடு (Item Response Theory) என்பவற்றைப் பயன்படுத்தி பரீட்சார்த்திகளின் துலங்கல்களைப் பகுப்பாய்வு செய்தலினூடாகப் பெறப்பட்ட தகவல்கள் என்பன இந்த அறிக்கையை தயாரிப்பதற்கு ஆதாரமாகக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன.

வினாப்பத்திரத்திலுள்ள ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கும்போது பரீட்சார்த்திகள் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டிய விடயங்கள், கற்றல்-கற்பித்தல் பணிகள் பற்றிய கருத்துகள், ஆலோசனைகள் என்பனவும் இந்த அறிக்கையில் பகுதி III இல் அடங்கியுள்ளன. பல்வேறு தேர்ச்சிகள், அத்தேர்ச்சி மட்டங்களை அணுகுவதற்கான கற்றல் - கற்பித்தல் செயன்முறையை ஒழுங்கமைக்கும் விதம் என்பன தொடர்பாக இந்த அறிக்கையானது பெரிதும் துணை புரியும் என நம்புகின்றேன்.

எதிர்காலத்தில் தொகுக்கப்படும் மதிப்பீட்டு அறிக்கைகளின் பண்புத்தரத்தை மேம்படுத்தக் கூடிய பயன்தரும் கருத்துகள், ஆலோசனைகள் என்பவற்றை எங்களுக்குச் சமர்ப்பிக்குமாறு அன்புடன் கேட்டுக் கொள்கிறேன்.

இந்த அறிக்கையைத் தயாரிப்பதற்குத் தேவையான தகவல்களை வழங்கிய பிரதம பரீட்சகர்கள், மேலதிக பிரதம பரீட்சகர்கள், உதவிப் பரீட்சகர்கள், ஊக்கத்துடன் பங்களிப்பு வழங்கிய குழு உறுப்பினர்கள், பொறுப்புடன் கடமையாற்றிய இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்கள அலுவலர்கள், பணிக்குழுவினர் ஆகியோருக்கும் அழகுற அச்சிட்டு உதவிய அரச அச்சகக் கூட்டுத்தாபனத்துக்கும் இத்தொகுப்புக்கான நிதி அனுசரணை வழங்கி எதிர்கால அறிவை மையமாகக் கொண்டு பாடசாலைக் கல்விமுறைமையை மீளமைக்கும் செயற்றிட்டத்துக்கும் (TSEP - WB) எனது மனமார்ந்த நன்றியை தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

டபிள்யூ.எம்.என்.ஜே. புஷ்பகுமார
பரீட்சை ஆணையாளர் நாயகம்

2013 டிசம்பர் 01

ஆய்வு அபிவிருத்திக் கிளை
தேசிய மதிப்பீட்டிற்கும் பரீட்சித்தலுக்குமான சேவை
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
பெலவத்தை,
பத்தரமுல்ல.

வழிகாட்டல்	-	**டபிள்யு.எம்.என்.ஜே. புஷ்பகுமார** பரீட்சை ஆணையாளர் நாயகம்
ஒழுங்கமைப்பும் நெறிப்படுத்தலும்	-	**கயாத்திரி அபேகுணசேகர** பரீட்சை ஆணையாளர் (ஆய்வு அபிவிருத்திக் கிளை)
இணைப்பும் தொகுப்பும்	-	**ஈ. குலசேகர** பிரதிப் பரீட்சை ஆணையாளர்
ஆக்கக் குழு	-	**சீ. பமுணுகே** டீ.எஸ் சேனாநாயக்கா கல்லூரி கொழும்பு 07 **எச்.கே. அமரசீலி** வேல்ஸ் குமார வித்தியாலயம் மொரட்டுவை **என்.எம். மிஸ்பா** ஸாஹிரா கல்லூரி கம்பளை **எஸ்.டீ. லொக்குகமகே** டீ.எஸ் சேனாநாயக்கா கல்லூரி கொழும்பு 07
மொழிபெயர்ப்பு	-	**செ. பிரணவதாசன்** உதவிப் பரீட்சை ஆணையாளர்
கணினி பக்க வடிவமைப்பு	-	**பொ. அற்புதரூபன்** **முகாமைத்துவ உதவியாளர்** **றஹீனா ஹாசிம்** கணினி தரவுப் பதிவாளர்

உள்ளடக்கம்

பகுதி I

1.0 பாடக் குறிக்கோள்களும் பாட அடைவு தொடர்பான தகவல்கள்

1.1 பாடக் குறிக்கோள்கள்

- ★ கணிதத்தினை கூடியளவு விளங்கிக் கொள்வதற்காக மாணவர்களுக்கு கணித ரீதியான ஆரம்ப எண்ணக்கருவைப் பெற்றுக் கொடுத்தல்
- ★ கணித ரீதியான பிரசினம் தீர்த்தல்களுக்கு முறையான விளக்கத்தையும் தெளிவையும் மாணவர்களுக்கு பெற்றுக் கொடுத்தல்
- ★ கணிதம் தொடர்பான தர்க்கரீதியான சிந்தனை தொடர்பாக மாணவர்களின் உளப்பாங்கை அதிகரித்தல்
- ★ கணிதம் கற்றலுக்காக மாணவர்களை உற்சாகப்படுத்தல்

குறிப்பு :

இந்த புதிய பாடத்திட்டத்தின் படி கணிதம் சார் அறிவை அதிகரிப்பது மட்டும் அல்லாது அன்றாட வாழ்க்கையில் கணிதஞ்சார் அறிவைப் பயன்படுத்தும் திறனை அதிகரிப்பதன் மூலம் உள்ளார்ந்த அபிவிருத்தி ஏற்படும் என எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது.

1.2. பரீட்சார்த்திகளின் பாட அடைவு தொடர்பான புள்ளிவிபர ரீதியான தகவல்கள்

1.2.1 பரீட்சைக்குத் தோற்றியோர் தொகை

மொழிமூலம்	பாடசாலை	தனிப்பட்ட	மொத்தம்
சிங்களம்	20346	288	20634
தமிழ்	3035	85	3120
ஆங்கிலம்	1413	84	1497
மொத்தம்	**24794**	**457**	**25251**

அட்டவணை 1

1.2.2 பரீட்சார்த்திகள் தரங்கள் பெறப்பட்ட விதம்

தரம்	பாடசாலைப் பரீட்சார்த்தி		தனிப்பட்ட பரீட்சார்த்தி		மொத்தம்	சதவீதம்
	எண்ணிக்கை	சதவீதம்	எண்ணிக்கை	சதவீதம்		
A	1396	5.63	14	3.06	1410	5.59
B	1660	6.69	15	3.28	1675	6.63
C	3795	15.31	39	8.54	3834	15.18
S	5774	23.29	67	14.66	5841	23.13
F	12169	49.08	322	70.46	12491	49.47
மொத்தம்	**24794**	**100.00**	**457**	**100.00**	**25251**	**100.00**

அட்டவணை 2

1.2.3 மாவட்டங்களின் அடிப்படையில் முதல் முறையாகத் தோற்றிய பாடசாலைப் பரீட்சார்த்திகள் தரங்கள் பெற்றுள்ள முறை:

மாவட்டம்	தோற்றியவர் எண்ணிக்கை	மிகச் சிறந்த சித்தி (A) பெற்றவர்		விசேட திறமைச் சித்தி (B) பெற்றவர்		திறமைச் சித்தி (C) பெற்றவர்		சாதாரண சித்தி (S) பெற்றவர்		சித்தி (A+B+C+S) பெற்றவர்		சித்தி யடையாதவர் (F)	
		எண்ணிக்கை	%	எண்ணிக்கை	%	எண்ணிக்கை	%	எண்ணிக்கை	%	எண்ணிக்கை	%	எண்ணிக்கை	%
1. கொழும்பு	3086	189	6.12	196	6.35	477	15.46	681	22.07	1543	50.00	1543	50.00
2. கம்பஹா	1561	50	3.20	70	4.48	180	11.53	326	20.88	626	40.10	935	59.90
2. களுத்துறை	952	30	3.15	35	3.68	93	9.77	200	21.01	358	37.61	594	62.39
4. கண்டி	1007	51	5.06	49	4.87	152	15.09	212	21.05	464	46.08	543	53.92
5. மாத்தளை	202	5	2.48	15	7.43	25	12.38	45	22.28	90	44.55	112	55.45
6. நுவரெலியா	281	10	3.56	9	3.20	37	13.17	70	24.91	126	44.84	155	55.16
7. காலி	1083	65	6.00	62	5.72	163	15.05	212	19.58	502	46.35	581	53.65
8. மாத்தறை	901	79	8.77	54	5.99	141	15.65	183	20.31	457	50.72	444	49.28
9. அம்பாந்தோட்டை	493	39	7.91	29	5.88	58	11.76	107	21.70	233	47.26	260	52.74
10. யாழ்ப்பாணம்	663	64	9.65	44	6.64	112	16.89	151	22.78	371	55.96	292	44.04
11. கிளிநொச்சி	51	4	7.84	4	7.84	7	13.73	10	19.61	25	49.02	26	50.98
12. மன்னார்	46	2	4.35	3	6.52	4	8.70	13	28.26	22	47.83	24	52.17
13. வவுனியா	87	7	8.05	5	5.75	17	19.54	14	16.09	43	49.43	44	50.57
14. முல்லைத்தீவு	44	1	2.27	2	4.55	2	4.55	16	36.36	21	47.73	23	52.27
15. மட்டக்களப்பு	191	15	7.85	15	7.85	26	13.61	39	20.42	95	49.74	96	50.26
16. அம்பாறை	456	11	2.41	28	6.14	48	10.53	114	25.00	201	44.08	255	55.92
17. திருகோணமலை	155	3	1.94	9	5.81	21	31.00	91	58.71	124	80.00	31	20.00
18. குருநாகல்	1117	33	2.95	49	4.39	116	10.38	254	22.74	452	40.47	665	59.53
19. புத்தளம்	357	10	2.80	25	7.00	43	12.04	82	22.97	160	44.82	197	55.18
20. அனுராதபுரம்	429	13	3.03	14	3.26	49	11.42	102	23.78	178	41.49	251	58.51
21. பொலன்னறுவை	130	2	1.54	3	2.31	14	10.77	25	19.23	44	33.85	86	66.15
22. பதுளை	455	17	3.74	18	3.96	51	11.21	116	25.49	202	44.40	253	55.60
23. மொனராகலை	169	3	1.78	4	2.37	24	14.20	34	20.12	65	38.46	104	61.54
24. இரத்தினபுரி	656	23	3.51	31	4.73	63	9.60	128	19.51	245	37.35	411	62.65
25. கேகாலை	538	3	0.56	13	2.42	45	8.36	97	18.03	158	29.37	380	70.63
மொத்தம்	**15110**	**729**	**4.82**	**786**	**5.20**	**1968**	**13.02**	**3322**	**21.99**	**6805**	**45.04**	**8305**	**54.96**

அட்டவணை 3

1.2.4 வகுப்பாயிடை அடிப்படையில் புள்ளிகள் பெற்ற விதம்

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	சதவீத மீடிறன்	திரள் மீடிறன்	சதவீத திரள் மீடிறன்
91 - 100	28	0.11	25251	100.00
81 - 90	357	1.41	25223	99.89
71 - 80	1018	4.03	24866	98.48
61 - 70	1879	7.44	23848	94.44
51 - 60	2640	10.46	21969	87.00
41 - 50	3452	13.67	19329	76.54
31 - 40	3761	14.89	15877	62.87
21 - 30	3823	15.14	12116	47.98
11 - 20	3872	15.33	8293	32.84
01 - 10	4417	17.49	4421	17.51
00 - 00	4	0.02	4	0.02

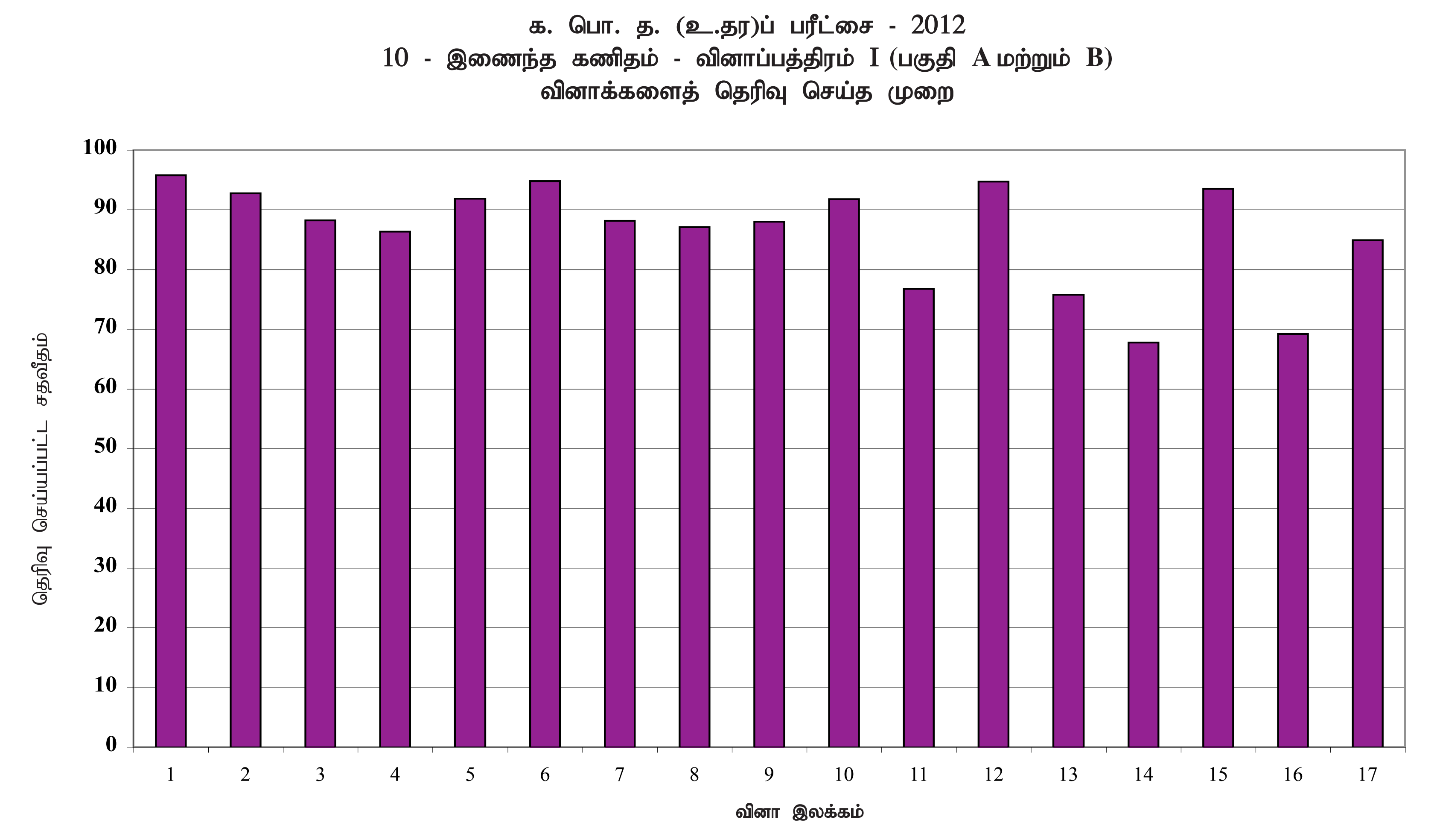
அட்டவணை 4

மேலே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து தகவல்களைப் பெறும் விதம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் :
இந்த பாடத்திற்காக 31 - 40 என்ற வீச்சினுள் புள்ளிகளைப் பெற்ற பரீட்சார்த்திகளின் எண்ணிக்கை 3761 ஆகும். அதனை சதவீதமாக எடுக்கும்போது 14.89% ஆகும். 40 புள்ளிகளைவிடக் குறைவாகப் புள்ளிகளைப் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை 15877 ஆவதோடு அது 62.87% ஆகும்.

1.3 பாட அடைவு பற்றிய பகுப்பாய்வு

1.3.1 வினாப்பத்திரம் 1 இன் வினாக்கள் தெரிவுசெய்துள்ள முறை



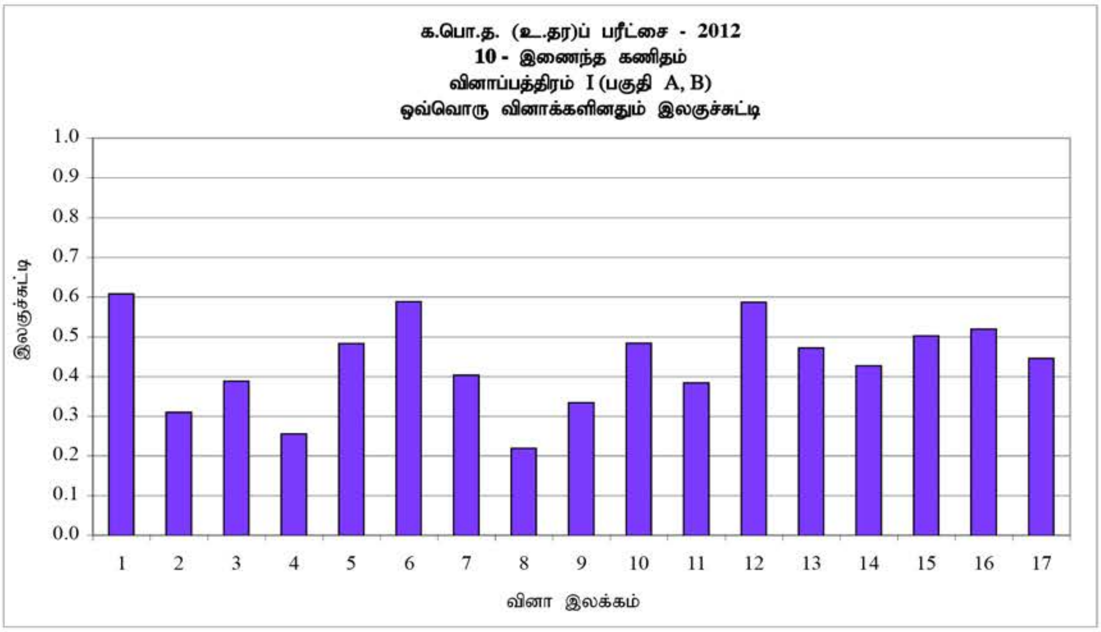
வரைபு 1 (RD/16/02/AL படிவங்கள் மூலம் பெறப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

வினாத்தாள் I A பகுதிக்கு உரிய 1 தொடக்கம் 10 வரையான வினாக்கள் கட்டாய வினாக்கள் ஆவதோடு பகுதி B யிற்குரிய 11 தொடக்கம் 17 வரையிலான வினாக்களில் 5 வினாக்ள் மட்டுமே தெரிவு செய்து விடை எழுத வேண்டும்.

இவ்வரைபிலிருந்து தகவல்களைப் பெறும்முறை பின்வரும் உதாரணம் மூலம் விளக்கப்படுகிறது.

உ-ம் : பரீட்சார்த்திகளில் அதிகளவிலானோர் 1ஆம் வினாவிற்கு விடை எழுதி உள்ளனர். அவ்விண்ணப்பதாரிகள் 97% சதவீதம் மட்டுமாகும். குறைவாக தெரிவுசெய்யப்பட்டுப்பது 14 ஆவது வினாவாவதோடு அதனைத் தெரிவுசெய்தவர்களின் சதவீதம் 68% ஆகும்.

1.3.2 வினாப்பத்திரம் I இல் - பகுதி A, B இற்குரிய வினாக்களுக்கான இலகுச்சுட்டி

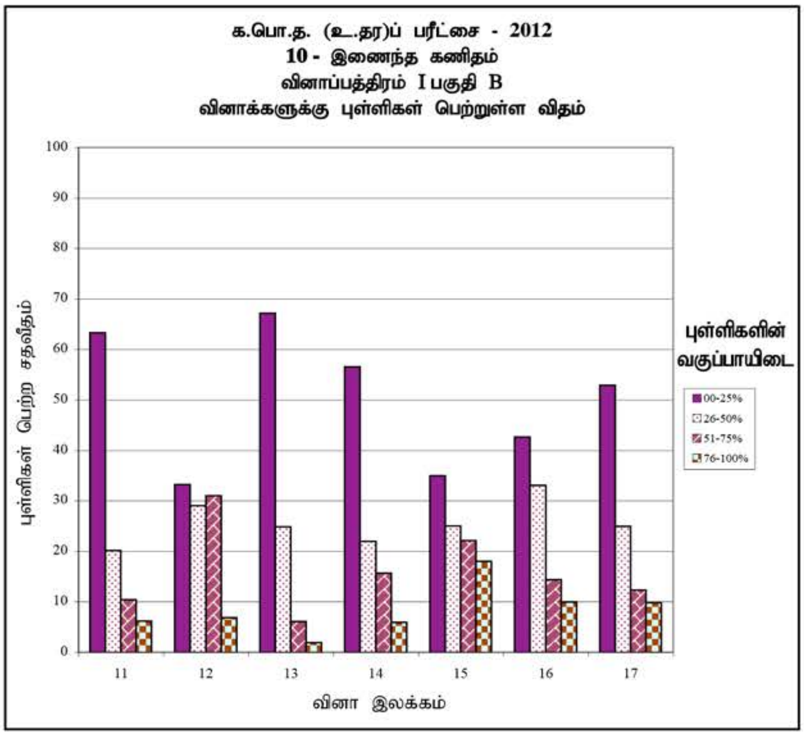


வரைபு 2 - (RD/16/05/AL படிவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டது.)

மேற்படி வரைபின் மூலம் தகவல் பெறும் விதம் பின்வரும் உதாரணம் மூலம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் - இவ் வினாக்களுள் அதிக இலகுத்தன்மையுடையது 1ஆவது வினாவாவதுடன் அதன் இலகுத்தன்மை 61% மட்டுமாகும். குறைந்த இலகுத்தன்மை காணப்படுவது 08 ஆம் வினாவாவதோடு அதன் இலகுத்தன்மை 22% மட்டுமேயாகும்.

1.3.3 வினாப்பத்திரம் I - பகுதி B இற்கு புள்ளிகள் பெற்றுள்ள விதம்

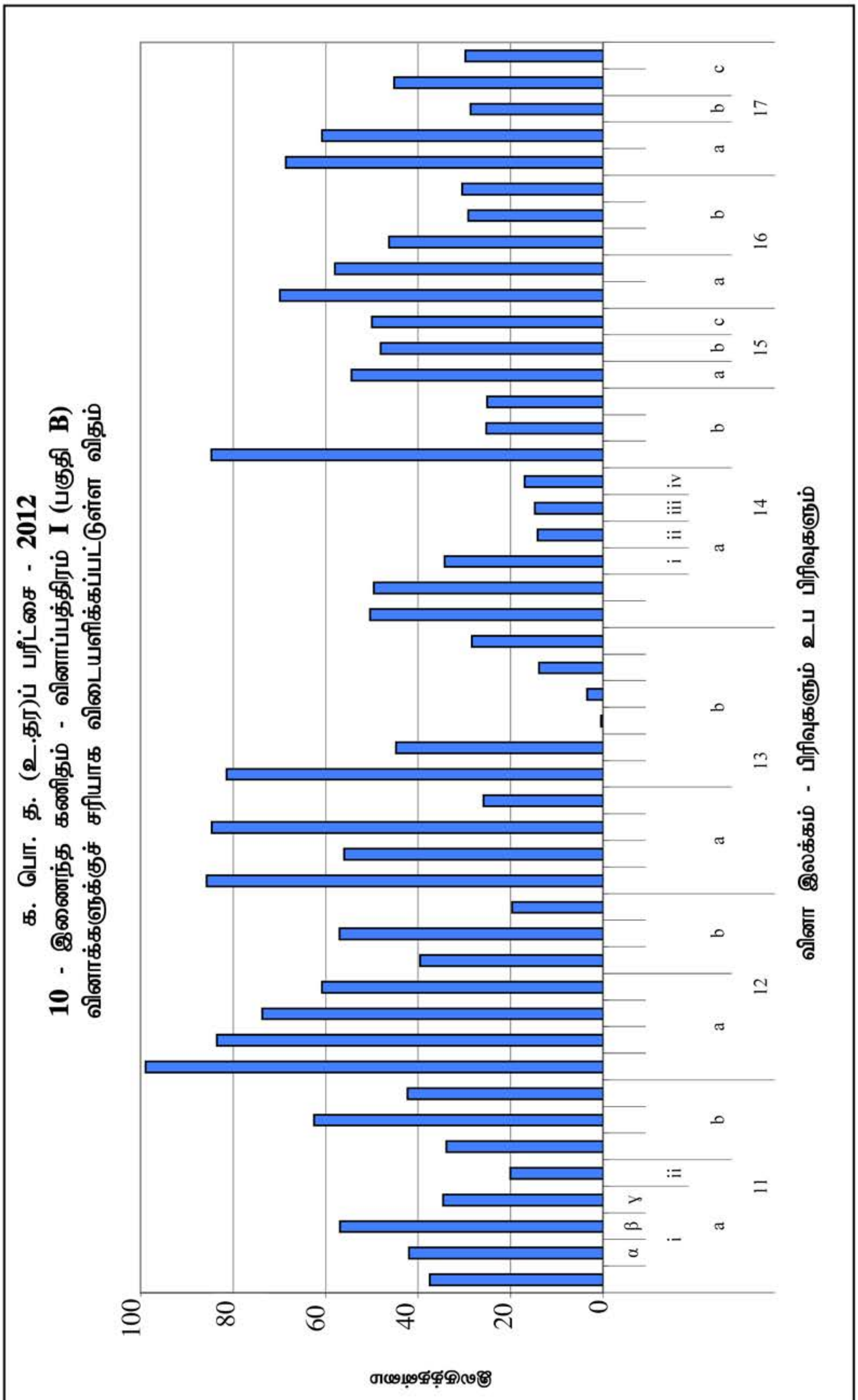


இவ் வரைபிலிருந்து தகவல்களைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறை பின்வரும் உதாரணம் மூலம் விளக்கப்படுகின்றது.

உ-ம்: வினா 11 இற்கு வழங்கப்பட்ட மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும். அந்தப் புள்ளிகளில் 76-100% என்ற வீச்சில் அதாவது 115-150 என்ற வீச்சினுள் பரீட்சார்த்திகளுள் 6% இனர் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர். இந்த வினாவிற்காக உரிய புள்ளிகளுள் 51-75% என்ற வீச்சில் அதாவது 80-110 என்ற வீச்சினுள் 10% இனர் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.
26-50% என்ற வீச்சில் அதாவது 40 - 75 என்ற வீச்சினுள் 20% இனர் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.
0-25% என்ற வீச்சில் அதாவது 0-35 வரையான வீச்சிற்குரிய புள்ளிகளை 63% இனர் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.

வரைபு 3 - (RD/16/02/AL படிவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டது.)

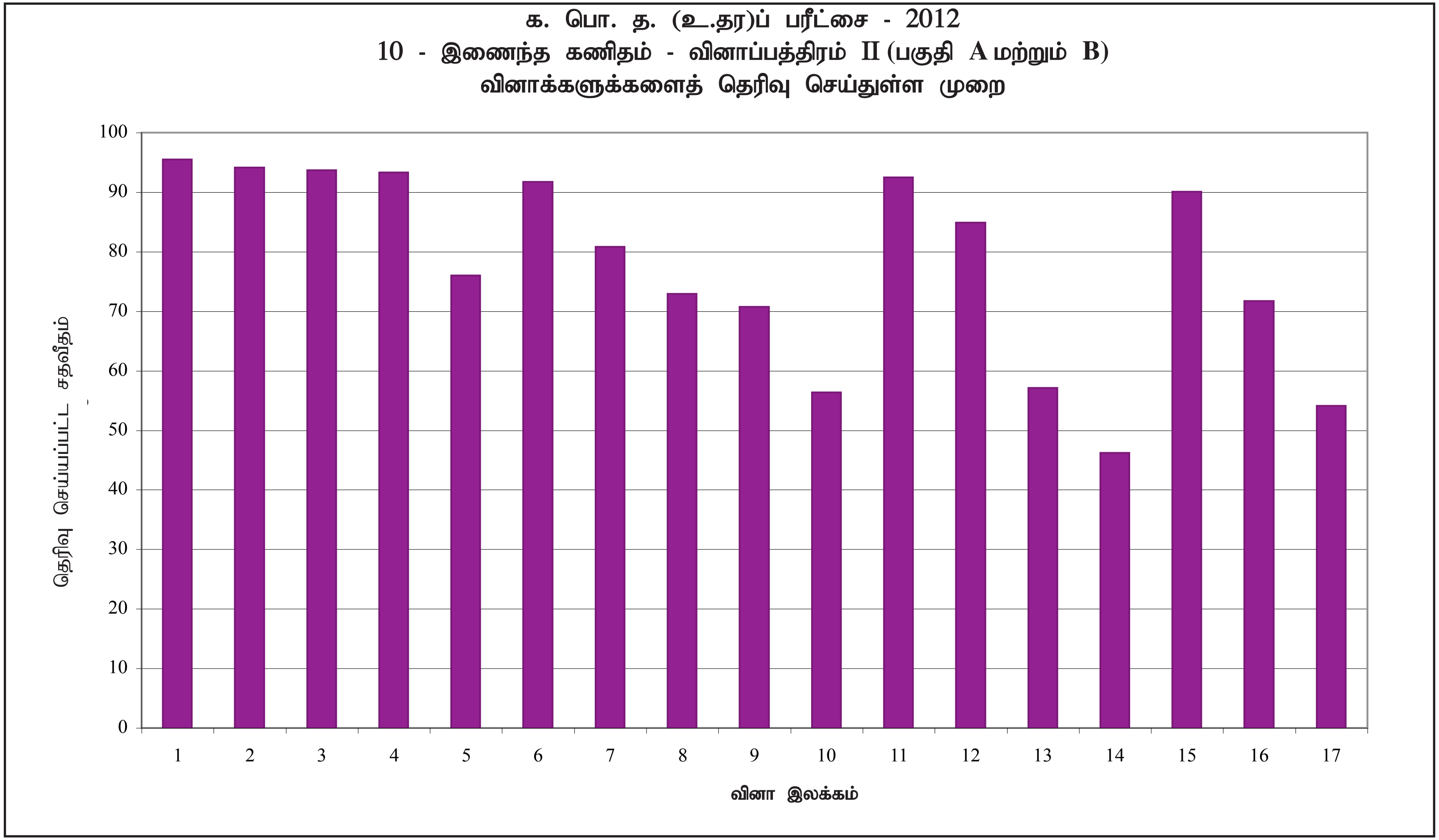
1.3.4 வினாப்பத்திரம் I இனது B பகுதி வினாக்களின் ஒவ்வொரு பிரிவுகளுக்கும் உப பிரிவுகளுக்கும் விடையளிக்கப்பட்டுள்ள விதம்



வரைபு 4. (RD/16/04/AL படிவங்கள் மூலம் பெறப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.)
இவ்வரைபிலிருந்து தகவல்களைப் பெறும் முறை பின்வரும் உதாரணம் மூலம் விளக்கப்படுகிறது.

உ-ம் : 11 ஆம் வினாவின் (a) (i) (α) பகுதியின் இலகுச் சுட்டி 42% ஆகும். (a) (i) (β) பகுதியின் இலகுத்தன்மை 58% ஆகும்

1.3.5 வினாப்பத்திரம் II இற்கு வினாக்களைத் தெரிவு செய்துள்ள முறை

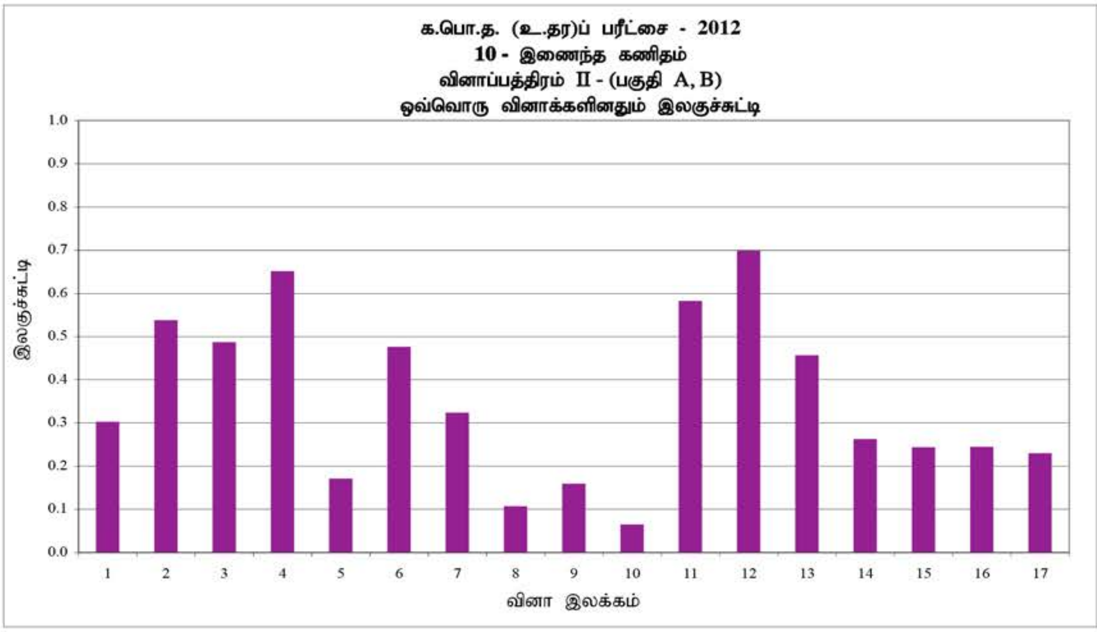


வரைபு 1 (RD/16/02/AL படிவங்கள் மூலம் பெறப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வரைபிலிருந்து தகவல்களைப் பெறும் முறை பின்வரும் உதாரணம் மூலம் விளக்கப்படுகிறது.

உ-ம் : வினாத்தாள் II A பகுதிக்கு உரிய 1 தொடக்கம் 10 வரையான வினாக்கள் கட்டாய வினாக்கள் ஆவதோடு பகுதி B இற்குரிய 11 தொடக்கம் 17 வரையிலான வினாக்களில் 5 வினாக்ள் மட்டுமே தெரிவு செய்து விடை எழுத வேண்டும்.

: பரீட்சார்த்திகளில் அதிகளவிலானோர் 1ஆம் வினாவைத் தெரிவு செய்துள்ளனர். அவ்விண்ணப்பதாரிகள் 96% சதவீதம் மட்டுமாகும். குறைவாக தெரிவுசெய்யப்பட்டிருப்பது 14 ஆவது வினாவாவதோடு அதனைத் தெரிவுசெய்தவர்களின் சதவீதம் 46% ஆகும்.

1.3.6 வினாப்பத்திரம் II இன் A, B பகுதிகளின் இலகுச்சுட்டி

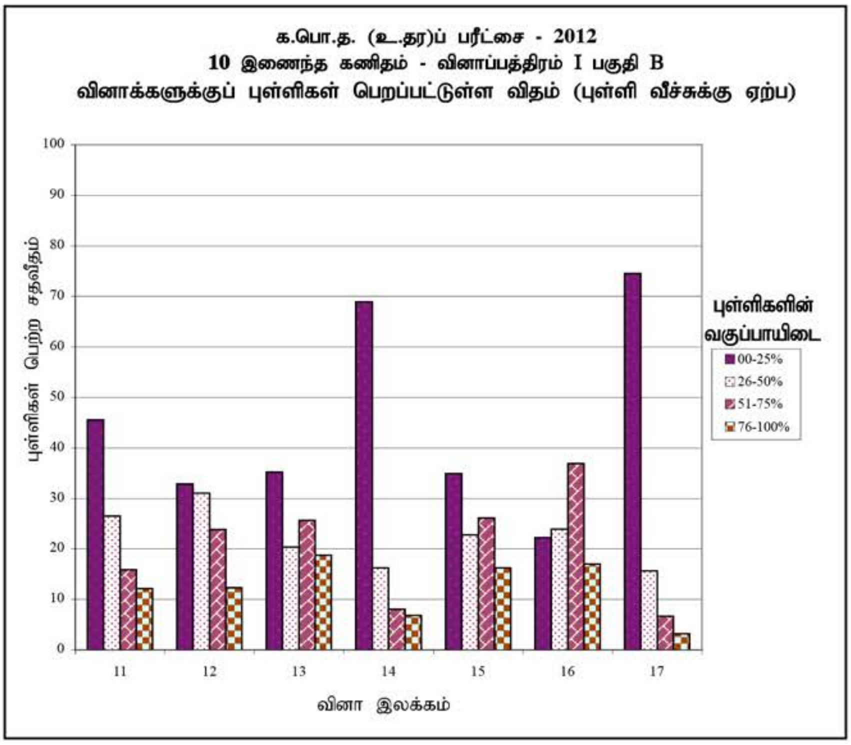


வரைபு 2 - (RD/16/05/AL படிவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டது.)

மேற்படி வரைபின் மூலம் தகவல் பெறும் விதம் பின்வரும் உதாரணம் மூலம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் - இவ் வினாக்களுள் அதிக இலகுத்தன்மையுடையது 12வது வினாவாவதுடன் அதன் இலகுத்தன்மை 70% மட்டுமாகும். குறைந்த இலகுத்தன்மை காணப்படுவது 10 ஆம் வினாவாவதோடு அதன் இலகுத்தன்மை 7% மட்டுமேயாகும்.

1.3.7 வினாப்பத்திரம் II இன் B பகுதிக்காக புள்ளிகள் பெற்றுள்ள விதம்

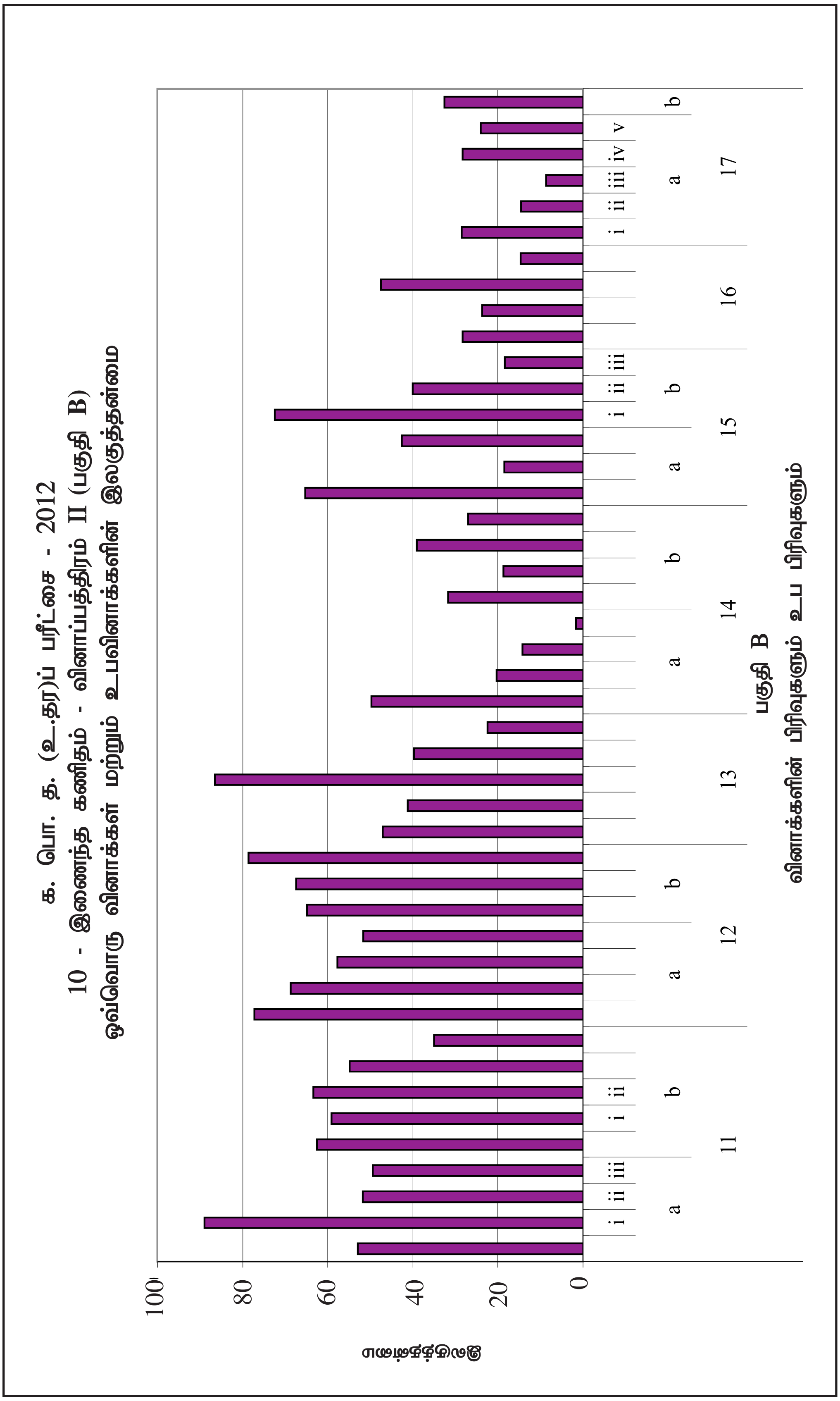


வரைபு 3 - (RD/16/02/AL படிவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டது.)

இந்த வரைபில் தகவல்களைப் பெற்றுக்கொள்ளும் முறை கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தின் மூலம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

உ-ம் : வினாப்பத்திரம் 11 இற்கு 150 புள்ளிகள் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளன. அந்தப் புள்ளிகள் 76 - 100% ஆயிடையில் அதாவது, 115 - 150 புள்ளிகளுக்கிடையில் பெற்றுக்கொண்டவர்கள் விடையளித்த மாணவர்களுள் 12% ஆனோர் மட்டுமாகும். இந்த முறைக்கு ஏற்ப அந்த வினாக்களுக்காக உரிய புள்ளிகளுள் 51 - 75% வீதமான ஆயிடையில் அதாவது 80-110 புள்ளிகளுக்கிடையில் பெற்றவர்கள் 16% ஆவதோடு புள்ளிகள் 26 - 50% மான ஆயிடையில் அதாவது 38 - 75 இற்கிடையில் 26% ஆனோர் மட்டும் 0 - 25% மான ஆயிடையில் அதாவது 0 - 37 என்ற வீச்சின் இடையே 63% ஆனோர் மட்டுமே ஆகும்.

1.3.8 **வினாப்பத்திரம் II இல் பெறப்பட்ட அடைவு**



வரைபு 1 : (RD/16/04/AL படிவத்திலிருந்து பெற்ற தகவல்களின் அடிப்படையில் தயாரிக்கப்பட்டது.)

மேலே தரப்பட்ட வரைபடத்திலிருந்து தகவல்களைப் பெற்றுக் கொள்ளும் முறை பின்வரும் உதாரணம் மூலம் விளக்கப்படுகிறது.

உதாரணம்: 11 ஆம் வினாவின் பிரிவு a (i) இன் இலகுத்தன்மை 85% ஆகும். பிரிவு a(iii) இன் இலகுத்தன்மை 45% ஆகும்.

பகுதி II

2 **வினாக்களும் அவற்றிற்கு விடையளிக்கப்பட்டமை தொடர்பான விபரங்களும்**

2.1 **வினாப்பத்திரம் I உம் அதற்கு விடையளிக்கப்பட்டுள்ளமை தொடர்பான விபரங்களும்**

2.1.1 **வினாப்பத்திரம் I - கட்டமைப்பு**

நேரம் 03 மணித்தியாலங்கள். மொத்தம் 100 புள்ளிகள்

இவ்வினாத்தாள் **இரண்டு** பகுதிகளைக் கொண்டது.

பகுதி A - **10** வினாக்கள். **எல்லா** வினாக்களுக்கும் விடை எழுத வேண்டும். ஒரு வினாவுக்கு **25** புள்ளிகள் வீதம் **250** புள்ளிகள்

பகுதி B - **ஏழு** வினாக்கள். **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுத வேண்டும். ஒரு வினாவுக்கு **150** புள்ளிகள் வீதம் **750** புள்ளிகள்.

வினாத்தாள் I இற்கு மொத்தப் புள்ளிகள் $= (250 + 750) \div 10 = 1000 \div 10 = 100$

* பரீட்சையில் பகுதி A யிற்கு வினாத்தாளின் ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் விடப்பட்டுள்ள இடத்தில் விடையை எழுத வேண்டும்.

2.1.2 I ஆவது வினாத்தாளில் ஒவ்வொரு வினாக்கள் அவற்றிற்கு எதிர்பார்க்கப்பட்ட விடைகள், புள்ளி வழங்கும் திட்டம், விடையளித்தல் தொடர்பான அவதானிப்பும் ஆலோசனைகளும்

பகுதி A

1. ***கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்*** *பயன்படுத்தி, யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறையெண்* n *இற்கு* $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ *என நிறுவுக.*

$n = 1$ ஆக, L.H.S. $= 1 =$ R.H.S. **(05)**

எனவே, $n = 1$ ஆக முடிவு உண்மை

$n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை என்க

அ-து $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ **(05)**

$n = p + 1$ ஆகும். இங்கு p என்பது நேர்முழு எண்

$1 + 2 + \dots + p + (p+1) = \underbrace{\frac{p(p+1)}{2} + (p+1)}_{(05)} = \underbrace{\frac{(p+1)\{(p+1)+1\}}{2}}_{(05)}$ ஆகும்

எனவே, $n = p + 1$ இற்கு முடிவு உண்மை

எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா n நேர்முழு எண் இற்கும் $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ என்பது உண்மை ஆகும். **(05)** **[25]**

---

1 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

பெருமளவிலான பரீட்சார்த்திகள் $n = p + 1$ இற்காக பெறுபேறு உண்மை என நிறுவும் போது இறுதிப்பெறுபேற்றை சரியான முறையில் முன்வைக்கவில்லை.அந்தப் பெறுபேறு $\frac{(p+1)\{(p+1)+1\}}{2}$ அல்லது $\frac{(p+1)\,(\overline{p+1}+1)}{2}$ எனக் காட்டப்பட்டிருக்க வேண்டியதோடு அதற்காக $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ என மட்டும் எழுதி இருந்தனர்.

அவ்வாறே பெறுபேறு $n = p + 1$ இற்காக உண்மை என நிறுவி இருக்கவில்லை. மேலும் விடையின் இறுதியிலே “கணித தொகுத்தல் முறையின் கோட்பாடுகளுக்கு ஏற்ப தரப்பட்ட கூற்று உண்மை” என பெருமளவிலான விடைகளில் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கவில்லை. எவ்வாறெனினும், விடையளிப்பதில் நல்ல நிலை காணப்பட்டிருந்தது. “கணித தொகுத்தறிதல் முறையை பயன்படுத்துவதில் எந்தவொரு n நேர் முழு எண்ணிற்காகவும் உண்மை என நிறுவும் திறமை மாணவர்களிடம் இருப்பினும் அந்தச் செய்முறைக்கு உரிய படிமுறைகள் சகலவற்றையும் சரியாகவும் தர்க்கரீதியான முறையாகவும் முன்வைப்பதற்கு மாணவர்களுக்கு பயிற்சியின்மையினால் மொத்தப்புள்ளிகளையும் பெற்றுக்கொண்டோரின் எண்ணிக்கை குறைவாகும். வினாப்பத்திரம் I இன் A பகுதியில் உள்ள சுருக்கமான விடையை எதிர்பார்த்துள்ள கட்டாய வினா 10 இனுள்ளும் இது மிகவும் இலகுவான வினாவாயினும் அதன் இலகுத்தன்மை 61% இற்கு வரையறுக்கப்பட்டமைக்கு மாணவர்களின் விடைகளில் இருந்த குறைபாடும் ஒரு காரணமாகும்.

2. ADDING என்னும் சொல்லின் எல்லா எழுத்துகளையும் பயன்படுத்தி ஆக்கத்தக்க ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவ்வொழுங்கமைப்புகளில் எத்தனையில் உயிரெழுத்துகள் (vowels) வேறாக்கப் பட்டிருக்கும் என்பதைக் காண்க.

ஆறு எழுத்துகளில் இரண்டு ஒரே எழுத்துக்கள் உள்ளன.
எல்லா எழுத்துக்களையும் ஒரே எழுத்தாகக் கொண்டு எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி

ஆக்கத்தக்க ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

(05) **(05)** **[10]**

சொல்லில் உள்ள உயிர் எழுத்துக்கள் A, I ஆகும்.
இரண்டு உயிரெழுத்துக்களையும் ஒரே எழுத்தாகக் கொண்டு, எல்லா எழுத்துக்களையும்

பயன்படுத்தி ஆக்கத்தக்க ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ **(05)**

A, I என்பவற்றை மாற்றுவதன் மூலம், எல்லா எழுத்துக்களையும் கொண்டு ஆக்கத்தக்க ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கை $= 2 \times 60 = 120$ **(05)**

எனவே உயிரெழுத்துக்கள் வேறாக்கப்பட்டிருக்கும் ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கை

$= 360 - 120 = 240$ **(05)** **[15]**

---

2 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

வரிசை மாற்றமும் சேர்மானமும் தொடர்பான ஆரம்ப எண்ணக்கரு தொடர்பாக போதியளவு விள்ககம் இன்மையினால் சரியான விடையை அளிப்பதற்கு மாணவர்களுக்கு முடியாது போனமையினால் இந்த வினாவினது இலகுத்தன்மை 31% இற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருந்தது. வகுப்பறையிலே பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் எளிய பயிற்சிகளில் போதியளவு பயிற்சி இருந்திருப்பின் இந்த வினாவிற்கு மிகவும் இலகுவாகவும் சரியாகவும் முழுமையாகவும் விடை எழுதுவதற்குரிய திறமை மாணவர்களிடம் இல்லாமை தெரிகிறது.

---

3. p ஆனது பூச்சியமல்லாத மாறிலியாக இருக்கும் $(1+px)^{12}$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் x இன் குணகமும் x^2 இன் குணகமும் முறையே $-q, 11q$ எனின், p, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$(1+px)^{12}$ என்னும் ஈருறுப்பு விரிவில் x இன் உறுப்பு ${}^{12}C_1\, px$ ஆகும்.

x இன் குணகம் : ${}^{12}C_1\, p = -q \Rightarrow 12p = -q \rightarrow (1)$ **(05)**

$(1+px)^{12}$ என்னும் ஈருறுப்பு விரிவில் x^2 இன் உறுப்பு ${}^{12}C_2\, p^2x^2$ ஆகும்.

x^2 இன் குணகம் : ${}^{12}C_2\, p^2 = 11q \Rightarrow 66p^2 = 11q \Rightarrow 6p^2 = q \rightarrow (2)$ **(05)**

$(1) + (2) \Rightarrow p = -2$ அல்லது 0 ஆகும். **(05)**

p பூச்சியமல்லாத மாறிலி ஆகையால், $p = -2$ ஆகும். **(05)**

(1) இலிருந்து $q = 24$ **(05)** **[25]**

---

3 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

ஈருறுப்பு விரிவு மற்றும் ${}^{n}C_{r}$ இனைச் சுருக்குதல் தொடர்பான அறிவு போதுமானதாக இல்லாமையினால் p என்பது பூச்சியமல்லாத மாறிலி என இருப்பினும் அதனை கருத்திற்கொள்ளாமையினால் விடையளித்தல் போதியளவு திருப்பதிகரமாக இல்லை. p இனை பூச்சியமற்றது என குறிப்படாது பிரித்தமையினால் புள்ளிகளைப் பெற முடியாது இருந்தது.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{2\sin^2 3x - x^2\cos x} = \dfrac{1}{17}$ எனக் காட்டுக.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{2\sin^2 3x - x^2\cos x} = \dfrac{1}{17}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2\sin^2 3x - x^2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{x}}{2\dfrac{\sin^2 3x}{x^2} - \cos x} \quad \begin{matrix}\textbf{(05)}\\ \textbf{(05)}\end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{x}}{18\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)^2 - \cos x} \quad \textbf{(05)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}}{18\left\{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)\right\}^2 - \lim\limits_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{18-1} = \frac{1}{17} \quad \textbf{(05)}$$

(05) **[25]**

---

4 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

எல்லைகள் தொடர்பான ஆரம்ப தத்துவங்களை சரியாகப் பயன்படுத்தும் திறமை இல்லாமையினால் அநேகமான விடைகள் போதியளவு திருப்திகரமான மட்டத்தில் அமைந்திருக்கவில்லை. அதனால் வினாவின் இலகுத்தன்மை 26% மளவில் குறைந்த மட்டதிற்கு கீழிறங்கி இருந்தது. எல்லைகள் தொடர்பான ஆரம்ப தத்துவங்களின் பயன்பாடுகளை உள்ளடக்கிய பயிற்சிகளில் அந்த ஒவ்வொரு தத்துவங்களைப் பயன்படுத்தும் சந்தர்ப்பங்கள் அமையுமாறு தயாரித்துக் கொண்டு படிமுறைகளை, கோவைகளை எழுத வேண்டுமெனினும் அநேகமான மாணவர்களின் விடைகளில் அதைக் காணமுடியாது இருந்தமை குறைபாடாவதோடு முழுப் புள்ளியையும் பெறமுடியாமைக்கு அதுவும் ஒரு காரணமாகும்.

---

5. $2e^x + 3e^{-x} = A(2e^x - e^{-x}) + B(2e^x + e^{-x})$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\int \frac{2e^x + 3e^{-x}}{2e^x + e^{-x}}\,dx$ ஐக் காண்க.

$2e^x + 3e^{-x} = A(2e^x - e^{-x}) + B(2e^x + e^{-x})$

$(2A + 2B - 2)\,e^x + (-A + B - 3)\,e^{-x} = 0 \Rightarrow A + B = 1, -A + B = 3$

$\Rightarrow A = -1, B = 2$ ஆகும்.

(05) **(05)** **[10]**

$\int \frac{2e^x + 3e^{-x}}{2e^x + e^{-x}}\,dx = -\int \frac{2e^x - e^{-x}}{2e^x + e^{-x}}\,dx + 2\int dx = -\ln(2e^x + e^{-x}) + 2x + C,$ இங்கு C எதேச்சை ஒருமை.

(05) **(10)** **[15]**

---

5 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

A, B போன்ற மாறிலிகளை சரியாகக் கண்டு இருப்பினும் தரப்பட்ட தொகையீட்டை பொருத்தமான வகையில் எளிய தொகையீட்டிற்கு வேறுபடுத்தல் திருப்தியான மட்டத்தில் இன்மையினால் இறுதி விடைவரை செல்வதற்கு முடியாது போனமையினால் வினாவின் இலகுத்தன்மை 48% இற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருந்தது. எளிய தொகையீட்டை உள்ளடக்கிய பயிற்சிகளை எப்போதும் மாணவர்களுக்கு வழங்கும் பயிற்சியினால் இவ்வகையான வினாக்களுக்கு திருப்திகரமாக விடை அளிப்பதற்கு மிகுந்த பயன்கிடைக்கும்.

---

6. l ஆனது $(4, 0), (0, 2)$ என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடு எனவும் m ஆனது $(2, 0)$, $(0, 3)$ என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். l, m ஆகிய நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. **இதிலிருந்து**, உற்பத்தியினூடாகவும் l, m ஆகியவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகவும் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

l இன் சமன்பாடு $\frac{y}{x-4} = \frac{2-0}{0-4} \Rightarrow 2x + 4y - 8 = 0 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$ ஆகும். **(05)**

m இன் சமன்பாடு $\frac{y}{x-2} = \frac{3-0}{0-2} \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$ ஆகும். **(05)** **[10]**

---

l, m என்னும் நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஊடு செல்லும் யாதேனும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x + 2y - 4 + \lambda(3x + 2y - 6) = 0$ ஆகும். இங்கு λ ஒரு பரமானம் **(05)**

இக்கோடு உற்பத்தியினூடு செல்வதனால் $\lambda = -\frac{2}{3}$ ஆகும். **(05)**

எனவே தேவைப்படும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $2y - 3x = 0$ ஆகும். **(05)** **[15]**

மாற்றுமுறை :

உற்பத்தியின் ஊடு செல்லும் யாதேனும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y - \mu x = 0$ இங்கு μ ஒரு பரமானம் **(05)**

l, m நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளி $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ஆகும். **(05)**

இப்புள்ளியின் ஊடு நேர்கோடு செல்வதனால் $\mu = \frac{3}{2}$ ஆகும்.

எனவே தேவைப்படும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $2y - 3x = 0$ ஆகும். **(05)** **[15]**

6 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

$l_1 = 0,\ l_2 = 0$ என்ற நேர்கோடுகள் இரண்டும் இடைவெட்டும் புள்ளிகளுடாகச் செல்லும் எந்தவொரு நேர்கோட்னதும் சமன்பாட்டை λ எனும் பரமாணத்தைக் கொண்டு $l_1 + \lambda l_2 = 0$ என்பதனால் காட்டப்பட முடியும் என பயன்படுத்துவதற்காக பெருமளவான பரீட்சார்த்திகள் இரு நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியைக் கண்டு விடையளித்து இருந்தனர். தத்துவமான முறையை விட இலகுவான சுருக்க முறை மூலம் விடை எழுதி முழுப்புள்ளியையும் பெற்றுக் கொள்ள முடியுமான இந்த வினாவிற்கு அளித்திருந்த அதிக விடைகள் நீண்டதாகவும் அதிக நேரம் தேவைப்பட்டதாலும் புள்ளிகளைப் பெறுவதில் சிரமப்பட்டு இருந்ததை காண முடிந்தது. இந்த வினாவின் இலகுத்தன்மை 59% மாவதோடு இதனைவிட கூடிய இலகுத்தன்மை முதலாவது வினாகும். இதன் இலகுத்தன்மை 61% மட்டுமாகும்.

---

7. *ஒரு வளையி C ஆனது சமன்பாடு $y = 4 - 4x + 3x^2 - x^3$ இனால் தரப்படுகின்றது. வளையி C யிற்குப் புள்ளி $(1, 2)$ இல் வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இத்தொடலி வளையி $y^2 = 4x$ இற்குப் புள்ளி $(1, 2)$ இல் வரையப்பட்ட தொடலிக்குச் செங்குத்தானதெனக் காட்டுக.*

$(1, 2)$ என்னும் புள்ளியில் வளையி C இற்கு தொடலியின் படித்திறன்

$$= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = \left.(-4 + 6x - 3x^2)\right|_{x=1} = -1$$

(05) **(05)**

எனவே வளையி C இற்கு $(1, 2)$ என்னும் புள்ளியில் தொடலியின் சமன்பாடு $\dfrac{y-2}{x-1} = -1$

$x + y - 3 = 0$ **(05)** **[15]**

$(1, 2)$ என்னும் புள்ளியில் வளையி C இற்கு தொடலியின் படித்திறன்

$$= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{2}{y}\right|_{y=2} = 1 \quad \textbf{(05)}$$

$(1, 2)$ என்னும் புள்ளியில் பரப்பளவு ஊயிற்கு வரையும் தொடலியின் படித்திறன் $\times$ $(1, 2)$ புள்ளிகளில்

$y^2 = (4x)$ எனும் வரைபிற்கு வரையும் தொடலிகளின் பெருக்கம் $= (-1) \times 1 = -1$ ஆகும்.

னவே, வளையி C இற்கு $(1, 2)$ என்னும் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலியானது, பரவளையிற்கு $(1, 2)$ என்னும் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலிக்கு செங்குத்தாகும். **(05)** **[10]**

---

7 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் வளையியின் இரு இடங்களுக்கு வரையும் தொடலியின் சமன்பாட்டை சரியாக கண்டு இருப்பினும் நேர்கோடுகள் இரண்டினதும் சாய்வின் பெருக்கம் -1 எனக் காட்டுவதனால் அவை ஒவ்வொன்றும் செங்குத்து என காட்டுவதில் தவறிய காரணத்தினால் மொத்தப் புள்ளிகளை பெற முடியாமையைக் காணமுடிந்தது. அந்தக் காரணத்தினால் வினாவின் இலகுத்தன்மை 40% இற்கு மட்டுப்படுத்தப்பட்டிருந்தது.

---

8. $(2, 0), (0, 2)$ என்னும் புள்ளிகளினூடாக உள்ள யாதாயினும் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $x^2 + y^2 - 4 + \lambda(x + y - 2) = 0$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக; இங்கு λ ஒரு பரமானம். இவ்வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரையையும் λ வின் சார்பில் காண்க.

புள்ளிகள் $(2, 0), (0, 2)$ என்பவற்றின் ஊடாகச் செல்லும் யாதேனும் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டினை

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க.

இதிலிருந்து $4 + 4g + c = 0, 4 + 4f + c = 0$ **(05)**

ஆகவே, $f = g, c = -4(g + 1)$ **(05)**

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2gy - 4(g + 1) = 0$

$x^2 + y^2 - 4 + \lambda(x + y - 2) = 0$; இங்கு $\lambda = 2g$ **(05)** **[15]**

$$\left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 4 - 2\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 = 0$$

$$ie.\ \left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{(\lambda + 2)^2 + 4}{2} = 0$$

வட்டத்தின் மையம் $\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$ **(05)**

வட்டத்தின் ஆரை $\sqrt{\frac{(\lambda + 2)^2 + 4}{2}}$ **(05)** **[10]**

---

8 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

வினாத்தாள் I இன் பகுதி A யில் உள்ள சுருக்கமான விடையை எதிர்பார்க்கும் பத்து வினாக்களுள் இலகுத்தன்மை குறைந்த வினா இதுவாகும். அதன் இலகுத்தன்மை 22% வரை குறைந்து காணப்பட்டது. ஆள்கூற்று கேத்திர கணித தத்துவங்களில் வட்டம் தொடர்பான பாட அலகுகள் போன்றே இந்த வினாவிற்கு அடிப்படையான பாட விடயங்களில் சிக்கல் இல்லை எனினும் தேவையான பெறுபேற்றை நிறுவுவதற்குப் பதிலாக உண்மையை எடுத்துக் காட்டியமையால் புள்ளி குறைவதற்குக் காரணமாக இருந்தது. வினா கேட்கப்பட்ட விதத்திற்கேற்ப விடையை ஒழுங்கமைத்துக்கொள்வதற்கு மாணவர்களைப் பழக்கப்படுத்துவதன் தேவையை இங்கு கவனத்திற் கொள்ள வேண்டும்.

9. AB யை ஒரு விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க; இங்கு $A = (1, 3)$, $B = (2, 4)$ ஆகும். அத்துடன் வட்டம் S ஐ நிமிர்கோணமுறையாக வெட்டுகின்ற மையம் $(-1, 2)$ ஐக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

S என்னும் வட்டத்தில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி (x, y) என்க.

அப்போது, $\left(\dfrac{y-3}{x-1}\right)\left(\dfrac{y-4}{x-2}\right) = -1$ **(10)**

$x^2 + y^2 - 3x - 7y + 14 = 0$ **(05)** **[10]**

மாற்றுமுறை:

S என்னும் வட்டத்தின் மையம் $(-g \quad -f)$ என்க.

$-g = \dfrac{3}{2}$, $-f = \dfrac{7}{2}$ **(05)**

S என்னும் வட்டத்தின் ஆரை $\sqrt{\dfrac{(2-1)^2 + (4-3)^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **(05)**

எனவே வட்டம் S இன் சமன்பாடு $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

$x^2 + y^2 - 3x - 7y + 14 = 0$ **(05)** **[15]**

$(-1, 2)$ யை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ **(05)**

இவ்வட்டமும் S என்ற வட்டமும் நிமிர் கோணத்தில் இடைவெட்டுவதனால்

$2\left(-\dfrac{3}{2}\right)(1) + 2\left(-\dfrac{7}{2}\right)(-2) = k + 14 \Rightarrow k = -3$

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ **(05)** **[10]**

---

9 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இதுவும் திருப்திகரமான அடைவுமட்டத்தைக் காட்டாத வினாவாகும். இதன் இலகுத்தன்மை 35% இலும் குறைவு. தரப்பட்ட தரவுக்கேற்ப விட்டத்தினது இரு முனைகளின் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளில் தரப்பட்ட $S = 0$ என்ற வட்டத்தின் சமன்பாட்டைச் சரியாக கண்டு இருப்பினும் அந்த $S = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு நிமிர்கோண முறையான வட்டத்தினது சமன்பாட்டை சரியாக பயன்படுத்தி இராமையினால் புள்ளிகள் குறைவடைவதற்கு அதிகமாக செல்வாக்குச் செலுத்தியமை ஒரு காரணமாகும்.

---

10. $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ என எடுத்து $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$ எனக் காட்டுக. $\tan\left(\dfrac{23}{12}\pi\right)$ இன் பெறுமானத்தை **உய்த்தறிக**.

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1}=2-\sqrt{3}\ \textbf{(05)}$$

(05) **(05)** **[15]**

$$\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right)=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\left(2-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-2$$

(05) **(05)** **[10]**

---

10 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினாவிற்கு அளித்த விடை ஓரளவு திருப்திகரமாக இருந்ததுடன் அதன் இலகுத்தன்மை 48% வரை அதிகரித்துள்ள வினாவொன்றாகும். அதிகமான மாணவர்கள் முதலாவது பகுதிக்கு திருப்தியாக விடை எழுதி இருந்த போதும் அதிகளவிலான மாணவர்களுக்கு உய்த்தறிதல் தொடர்பாக தெளிவான விளக்கம் இன்மையினால் அதற்குரிய புள்ளிகளைப் பெறாமையினால் மொத்தப் புள்ளிகளையும் பெறக் கூடிய சந்தர்ப்பத்தை அவர்களால் பெற முடியாது போனது. $(0, \pi/2)$எனும் வீச்சில் புறக்கோணத்தின் திரிகோண கணித விகிதங்களைக் கணிக்கும் போது கோணங்களின் மீடிறன் தொடர்பாக மற்றும அவற்றிற்கு சார்பான திரிகோண கணித விகிதங்களிடையேயுள்ள தொடர்புகளை ஈடுபடுத்த வேண்டும்.

---

10 - இணைந்தகணிதம் I - பகுதி B

* **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

---

11. (*a*) $f(x) \equiv x^2 + 2kx + k + 2$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு k ஒரு மெய்ம் மாறிலி.

(i) $f(x)$ ஐ வடிவம் $(x-a)^2 + b$ யில் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b ஆகியன k யின் சார்பில் துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகளாகும்.

நுண்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தாமல் $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியைக் கண்டு, இப்புள்ளி ஓர் இழிவுப் புள்ளியெனக் காட்டுக.

$f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தை k யின் சார்பில் காண்க.

இதிலிருந்து, வளையி $y = f(x)$ ஆனது

(α) $-1<k<2$ ஆக இருப்பின் x - அச்சிற்கு முழுமையாக மேலே கிடக்கின்றது,

(β) $k=-1$ அல்லது $k=2$ ஆக இருப்பின் x - அச்சைத் தொடுகின்றது,

(γ) $k<-1$ அல்லது $k>2$ ஆக இருப்பின் x - அச்சை இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது எனக் காட்டுக.

(ii) $k<-2$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் m இன் எல்லா மெய், முடிவுள்ள பெறுமானங்களுக்கும் நேர்கோடு $y=mx$ ஆனது வளையி $y = f(x)$ ஐ இரு மெய், வேறுவேறான புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றதென நிறுவுக.

(*b*) $g(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ எனக் கொள்வோம்.

மீதித் தேற்றத்தை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்தி $(x+1)^2$ ஆனது $g(x)$ இன் ஒரு காரணியெனக் காட்டுக.

$g(x)$ ஐ வடிவம் $(x-a)^2(x^2+bx+c)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b, c ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகளாகும்.

x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $g(x) \geq 0$ என **உய்த்தறிக**.

(a) (i) $f(x) \equiv x^2 + 2kx + k + 2 \equiv (x+k)^2 + 2 + k - k^2$, **(05)**

$\equiv (x-a)^2 + b$; இங்கு $a = -k$, $b = 2 + k - k^2$

(05) **(05)** **[15]**

---

x ஆனது $-\infty$ இலிருந்து $-k$ இற்கு அதிகரிக்க சார்பு $f(x)$ ஆனது $-\infty$ இலிருந்து $2 + k - k^2$ இற்கு குறையும்.

x ஆனது $-k$ இலிருந்து ∞ இற்கு அதிகரிக்க சார்பு $f(x)$ ஆனது $2 + k - k^2$ இலிருந்து ∞ இற்கு அதிகரிக்கும். **(05)**

எனவே, $x = -k$ இல் ஒரு திரும்பற் புள்ளி மாத்திரம் உண்டு. அது இழிவுப்புள்ளி ஆகும்.

(05) **(05)** **[15]**

$f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $2 + k - k^2$ **(05)** **[05]**

$2 + k - k^2 = (2-k)(1+k)$ எனலாம்.

(α) $-1 < k < 2$ எனின், $f(x)$ இன் இழிவுப் நேரானது. ஆகவே வளையி முழுவதும் x அச்சிற்கு மேலே இருக்கும் **(05)** **(05)** **[10]**

(β) $k = -1$ அல்லது $k = 2$ எனின், $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் பூச்சியமாகும். எனவே வளையியானது $x-$ அச்சைத் தொடும். **(05)** **(05)** **[10]**

(γ) $k < -1$ அல்லது $k > 2$ எனின் $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் மறையானது. எனவே வளையியானது $x-$ அச்சை இரண்டு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டும்

(05) **(05)** **[10]**

(ii) $y = f(x)$ என்னும் வளையியை $y = mx$ என்னும் நேர்கோடு இடைவெட்டும் எனின், இடைவெட்டும் எந்த ஒரு புள்ளியின் x ஆள்கூறு $x^2 + 2kx + k + 2 = mx$ என்னும் சமன்பாட்டினை திருப்தி செய்யும். **(05)**

i.e, $x^2 + (2k - m)x + k + 2 = 0$ **(05)**

எனவே, $y = f(x)$ வளையியை $y = mx$ என்னும் நேர்கோடு இரு வெவ்வேறு மெய் புள்ளிகளில் இடைவெட்டும். **(05)**

ஆயினாயின் $x^2 + (2k - m)x + k + 2 = 0$ என்பது இரு வெவ்வேறு மெய் மூலகங்களைக் கொண்டிருக்கும். **(05)**

வரையறுத்த மெய்பெறுமானத்தை m கொண்டிருப்பதற்கு $(2k - m)^2 - 4(k + 2) > 0$ ஆயினாயின்

$k < -2$ **(05)**

எனவே எல்லா வரையறுத்த m இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $y = f(x)$ எனும் வளையியை $y = mx$ என்னும் நேர்கோடு இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் இடைவெட்டும் $k < -2$ **[25]**

(b) $g(-1) = (-1)^4 + 4(-1)^3 + 7(-1)^2 + 6(-1) + 2 = 0$ **(05)**

$g(x)$ இனை $(x + 1)$ ஆல் வகுக்க பெறப்படும் மீதி 0 ஆகும்.

$\therefore$ $(x + 1)$, $g(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும். **(05)**

எனவே $g(x) \equiv (x + 1)\,Q(x)$ **(05)** இங்கு $Q(x)$ ஐ $g(x)$ ஆல் $(x + 1)$ ஆல் வகுக்க பெறப்படும் ஈவு $Q(x)$ ஆகும்.

$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ **(05)**

$Q(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = 0$ **(05)**

$Q(x)$ இனை $(x + 1)$ ஆல் வகுக்க பெறப்படும் மீதி 0 ஆகும்.

எனவே, $Q(x) \equiv (x + 1)\,R(x)$ **(05)** இங்கு $Q(x)$ இனை $(x + 1)$ ஆல் வகுக்க பெறப்படும் ஈவு $R(x)$

$\therefore$ $(x + 1)$, $Q(x)$ இன் காரணியாகும். **(05)**

$\therefore$ $g(x)$ இன் காரணி $(x + 1)^2$ ஆகும். **[35]**

$R(x) \equiv x^2 + 2x + 2$ **(05)**

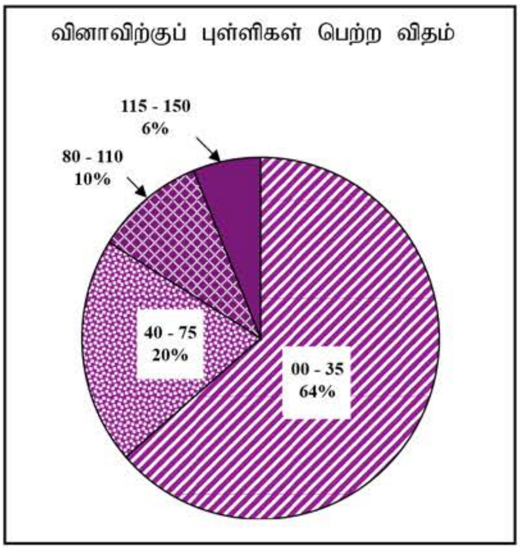
$g(x) \equiv (x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)$

$g(x) = (x - a)^2(x^2 + bx + c)$ இங்கு $a = -1,\ b = 2,\ c = 2$ **(10)** **[15]**

$g(x) = (x + 1)^2(x^2 + 2x + 2) = (x + 1)^2\left\{(x + 1)^2 + 1\right\} \geq 0$ எல்லா மெய் x இற்கும்

(05) **(05)** **[10]**

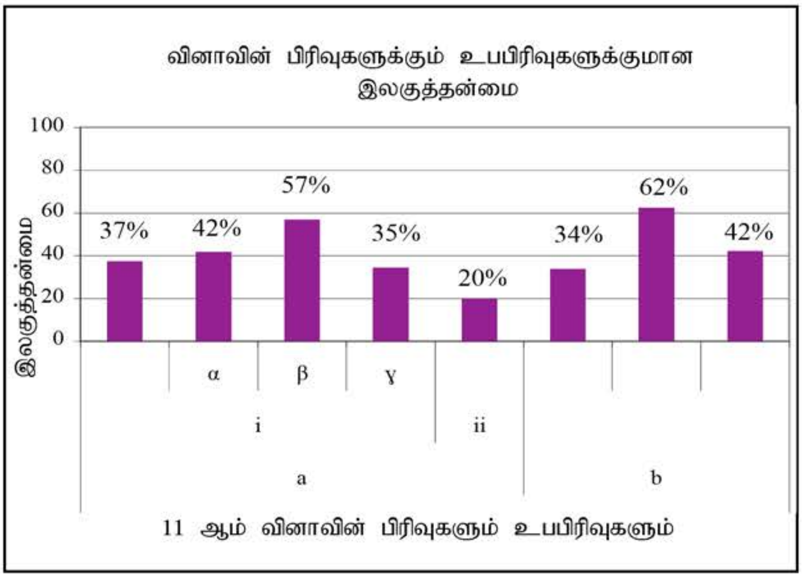
11 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 76.7% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 64%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 20%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 10%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 6%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கு 8 உபபிரிவுகள் உள்ளதோடு (a) (ii) ஆவது உபபிரிவைத் தவிர மற்றைய ஏனைய உபபிரிவுகளுக்குமான இலகுத்தன்மை 30% இனை அடைந்திருந்தது. அவற்றுள் (b) யினது இரண்டாவது உபபிரிவிற்கான இலகுத்தன்மை உயர்வாகக் காணப்படுவதுடன் அது 62% இற்கு உயர்வடைந்திருந்தது. குறைந்த இலகுத்தன்மை இருப்பது (a) (ii) ஆவது உபபிரிவாவதுடன் அதன் இலகுத்தன்மை 20% ஆகும்.

(a) (i) பெருமளவான மாணவர்கள் $f(x)$ எனும் சார்பினை $(x-a)^2+b$ எனும் வடிவில் முன்வைத்திருந்தாலும் a, b என்ற மாறிலிகளை k இன் மூலம் முன்வைக்கவில்லை. அவ்வாறே $f(x)$ என்ற சார்பிற்கு இழிவுப்பெறுமானம் உள்ளதென்பதை சரியாக காரணத்துடன் முன்வைத்தலில் அந்த இழிவுப் பெறுமானம் k யின் சார்பாக காட்டுவதில் பெருமளவான குறைபாட்டை காணக்கூடியதாய் இருந்தது.

(α) தரப்பட்ட தேவைகளைப் பயன்படுத்தி விடையாக $-1<k<2$ ஆகும் போது $f(x)>0$ என்பதை பெறாது இருந்தமை.

(β) மிகவும் திருப்திகரமான விடை எழுதப்பட்டிருந்தது.

(γ) தரப்பட்ட தேவைகளைப் பயன்படுத்தி விடை பெறப்படாது இருந்தது.

α, β என்ற சந்தர்ப்பங்களுக்காக இருபடிச் சமன்பாட்டின் தன்மைகாட்டி (Δ) இனைப் பயன்படுத்தி விடையைப் பெற்றுக்கொள்வதற்கு முயற்சித்தமை புள்ளிகள் குறைவடைவதற்குக் காரணமாக இருந்தது. α, γ என்ற பகுதிகளில் வினாவை சரியாக விளங்கிக் கொள்ளாமையினால் அவற்றினது இலகுத்தன்மை 42%, 35% அளவிற்கு குறைந்த மட்டத்திற்கு வீழ்ச்சியடைந்திருந்தது.

(ii) இந்த வினாவின் இலகுத்தன்மை குறைந்த பகுதி இதுவாகும். இந்தப் பகுதியினது இலகுத்தன்மை 20% வரை குறைவடைந்திருந்தமை மாணவர்களால் வினாவை சரியாக விளங்கிக் கொள்ள முடியாமையினால் இருக்கக் கூடும்.

(b) மீதித் தேற்றத்தை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்துதல் தொடர்பான அறிவு பெருமளவிலான மாணவர்களுக்கு இல்லை என்பதைக் காணக்கூடியதாய் இருந்தது. $(x+1)^2$ என்பது $g(x)$ இன் காரணியொன்று எனக் காட்ட வேண்டி இருந்த போதும் $g(-1)=0$ என பெற்றுக் கொண்டுள்ளதை அனேகமான விடைகளில் காணக்கூடியதாய் இருந்தும் $(x+1)$ இனால் $g(x)$ எனும் கூற்றை வகுக்கும் போது பெறப்படும் மீதியானது $(x+1)$ இன் காரணி எனக் காட்டி அந்த விடையைப் பெற்று இருக்கவில்லை. அந்தக்காரணத்தினால் இந்தப் பகுதியின் இலகுத்தன்மை திருப்தியடையக்கூடிய நிலையை அடைந்திருக்கவில்லை எனத் தெரிகிறது.

இந்த வினாவை நன்கு வாசித்து சரியாக விளங்கிக் கொண்டு இராமை காணப்படுவதும் அதற்குக் காரணம் தரப்பட்ட வினாவிற்கு உரிய அடிப்படை எண்ணக்கருக்கள் தொடர்பாக தெளிவான விளக்கம் மாணவர்களுக்கு இல்லாதிருந்தமையாகும். அதனால் மாணவர்களிடையே அடிப்படை எண்ணக்கருக்களை அபிவிருத்தி செய்வதற்காக இந்த வகையீட்டைப் பயன்படுத்தாது இருபடிச்சார்புகளின் நடத்தையினை விபரிக்கும் அறிவை வளர்ப்பதற்காக அவர்களுக்கு எளிய பயிற்சிகளைத் தொடர்ந்து செய்தல் பயனுள்ளதாகும்.

12. (*a*) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $12x^2+1 \equiv A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $u_r = f(r) - f(r+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐத் துணிக; இங்கு $u_r = \dfrac{12r^2+1}{(2r-1)^3(2r+1)^3}$.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}$ எனக் காட்டுக.

தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*b*) **ஒரே படத்தில்** $y = |2x-1|$, $y = |x| + \dfrac{5}{3}$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பருமட்டாக வரைக.

இதிலிருந்து, $3|x| \geq |6x-3| - 5$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானத் தொடையைக் காண்க.

யாதாயினும் $k \in \mathbb{R}$ இற்கு $y = |x| - k$ இன் வரைபை **ஒரே படத்தில்** கருதுவதன் மூலம் l இன் எப்பெறுமானத்திற்குச் சமன்பாடு $3|x| = |6x-3| + l$ ஒரு மெய்த் தீர்வை மாத்திரம் கொண்டுள்ளதெனக் காண்க.

(*a*) எல்லா $x \in \mathrm{IR}$ இற்கு $12x^2 + 1 = A(2x-1)^3 + B(2x+1)^3$

$x = \dfrac{1}{2}$ இற்கு $B = \dfrac{1}{2}$ **(05)**

$x = -\dfrac{1}{2}$ இற்கு $A = -\dfrac{1}{2}$ **(05)** **[10]**

$$\frac{12r^2+1}{(2r-1)^3(2r+1)^3} = \frac{-\frac{1}{2}(2r-1)^3 + \frac{1}{2}(2r+1)^3}{(2r-1)^3(2r+1)^3} \quad \textbf{(05)}$$

$$= \frac{1}{2(2r-1)^3} - \frac{1}{2(2r+1)^3} - f(r) - f(r+1)\text{ ; இங்கு } f(r) = \frac{1}{2(2r-1)^3}$$

(05) **(05)** **[15]**

$u_1 = f(1) - f(2)$ **(05)**

$u_2 = f(2) - f(3)$ **(05)**

. .

. .

. .

$u_{n-1} = f(n-1) - f(n)$ **(05)**

$u_n = f(n) - f(n+1)$ **(05)**

$$\sum_{r=1}^{n} Ur = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}$$

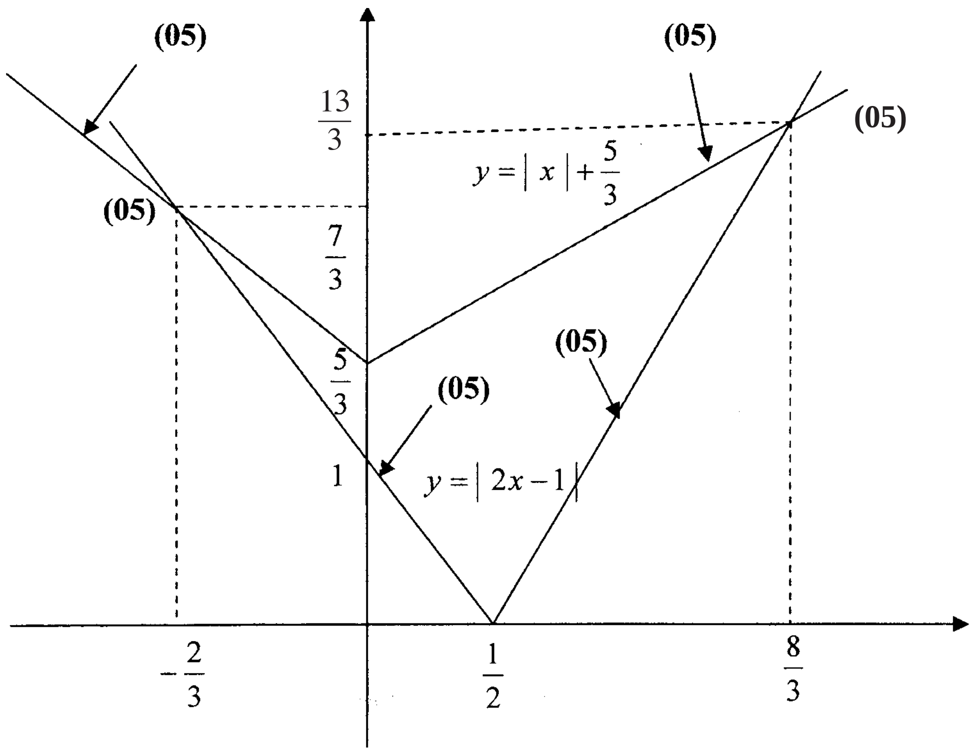
(05) **(05)** **[30]**

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3} \right\} = \frac{1}{2}$$ இது வரையறுக்கப்பட்டது. **(05)**

எனவே தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்கு தொடராகும் **(05)** **[10]**

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \frac{1}{2}$ ஆகும் **(05)** **[05]**

(*b*)

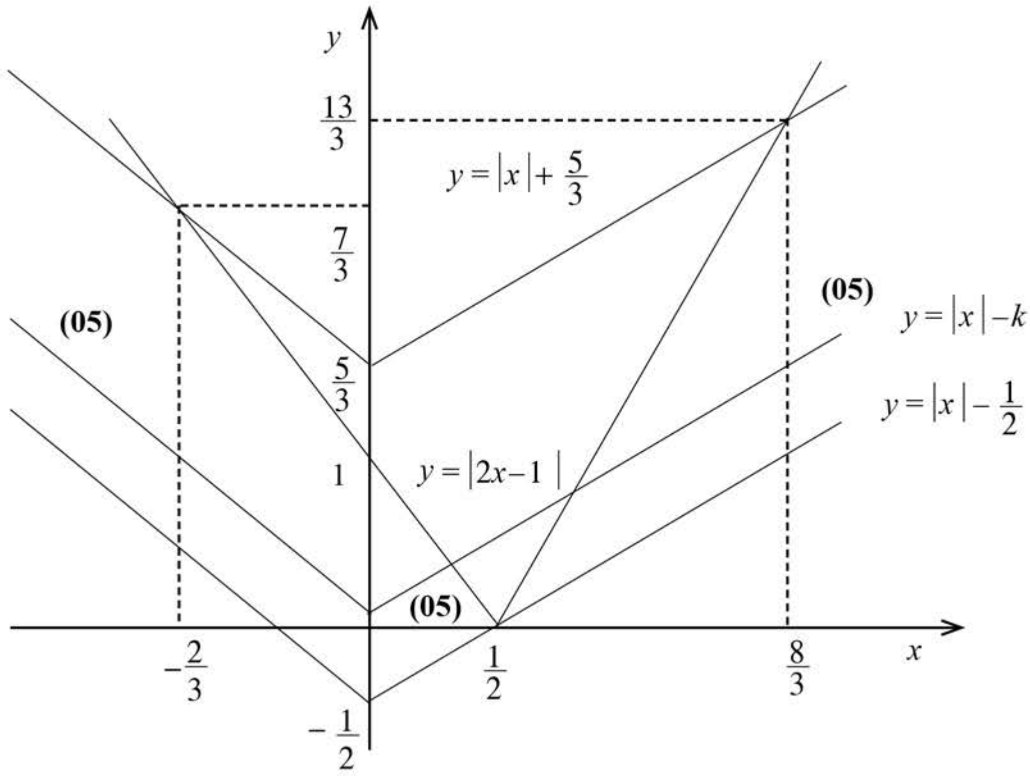


[30]

$3 | x | \geq | 6x - 3 | - 5 \Rightarrow | x | + \frac{5}{3} \geq | 2x - 1 |$ **(05)**

$3 | x | \geq | 6x - 3 | - 5$ இன் பெறுமானத் தொடை $\left\{ x : -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{8}{3} \right\}$

$x \in \left[\frac{-2}{3}, \frac{8}{3} \right]$ **(05)** **[10]**



[15]

வரைபு $y = |x| - k$ என்பது $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ என்னும் புள்ளியின் ஊடாக செல்லும் போது

(05)

$3|x| = |6x - 3| + l \Rightarrow |x| - \frac{l}{3} = |2x - 1|$ என்பது ஒரே ஒரு மெய் மூலத்தை மாத்திரம் கொண்டிருக்கும் **(05)**

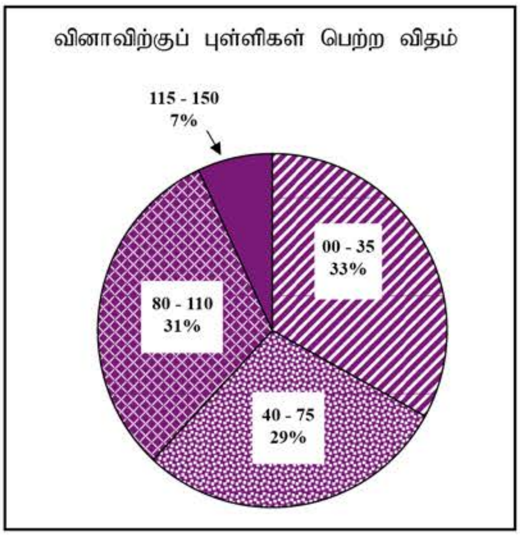
இது நடைபெறும் எனின் $k = \frac{1}{2}$ **(05)**

$|x| - \frac{l}{3} = |x| - \frac{1}{2} \Rightarrow l = \frac{3}{2}$ **(05)** **[25]**

(05)

---

12 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 94.7% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

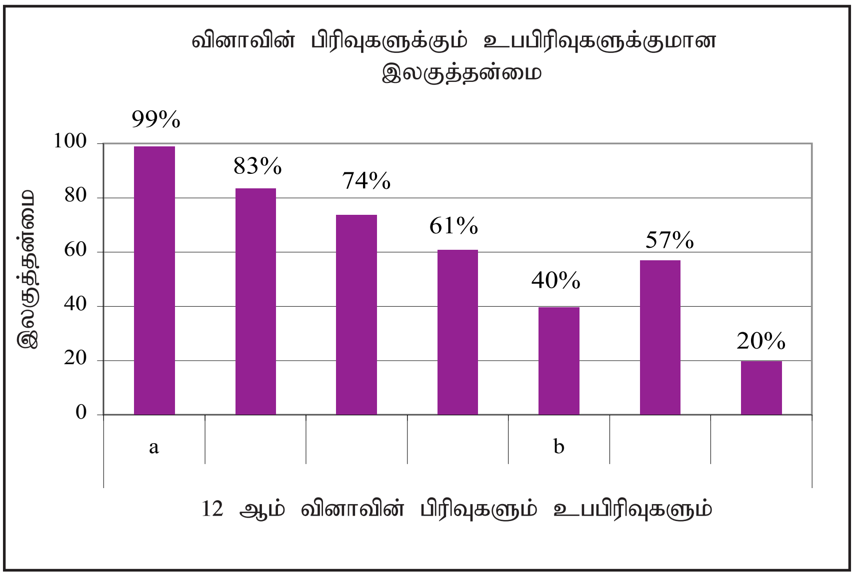
00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 33%

40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 29%

80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 31%

115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 7%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கு 7 உபபிரிவுகள் உள்ளதோடு அவற்றுள் 6 பகுதிகளின் இலகுத்தன்மை 40% இனை விட குறையாது இருந்தது. மிகவும் இலகுத்தன்மை குறைவாக இருந்தது இறுதி உபபிரிவு ஆவதோடு அதன் இலகுத்தன்மை 20% ஆகும். கூடிய இலகுத்தன்மை உடையது (a)யின் முதலாவது பகுதியாவதோடு அது 99% வரையான உயர் பெறுமானத்திற்கு அதிகரித்து இருந்தது.

(a) A, B என்ற மாறிகளைக் காண்பதில் பெருமளவிலான பரீட்சார்த்திகளினால் திருப்திகரமாக விடை எழுதப்பட்டிருந்தது. எவ்வாறெனினும் விரிவாக்க முறையில் விருத்தியின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதில் தேவையான சகல படிமுறைகளையும் சரியான முறையில் எழுதியிருக்கவில்லை. தரப்பட்ட விருத்தி ஒருங்கும் எனக் காட்டும் போது விருத்தியின் முதல் உறுப்பு n இனது கூட்டுத்தொகையாக முடிவிலிக்கு வரையறுக்கப்படும் என எல்லை தொடர்பாக தேற்றங்களைப் பாவித்துப் பெற்றுக் கொள்வில்லை. $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ இனது பெறுமானத்தை எழுதிக்காட்டவில்லை. இந்தக் காரணத்தினால் வினாவின் (a) பகுதிக்கு உரிய உயர் புள்ளிகளைப் பெற்றுக் கொள்வதில் அதிகமான மாணவர்கள் தவறியுள்ளனர்.

(b) இரு வரைபுகளினதும் வெட்டும் புள்ளிகளின் y இன் ஆள்கூறு குறிப்பிடப்பட்டிராமை ஒரு குறைபாடாகும். k என்பது தெரியாக் கணியமாகும் போது தரப்பட்ட மட்டுப் பெறுமானம் சார்பின் வரைபை வரைவதில் அனேகமானோர் சிரமப்பட்டுள்ளனர். சார்பின் மட்டுப் பெறுமானம் மற்றும் எளிய சமனிலிகள் தொடர்பான விளக்கம் அவற்றின் நடத்தைகள் தொடர்பான திறமைகள் குறைவதன் காரணத்தினால் வினாவின் இறுதிப் பகுதிக்கு சரியான துலங்களை காட்டிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை மிகக் குறைவாகும்

அதிகளவான எண்ணிக்கையினர் இந்த வினாவைத் தெரிவு செய்திருந்தனர். வினாவில் (a) பகுதியில் விருத்தியைக் கருதி பொருத்தமான விடயங்களை ஆராயும் வினாவாயினும் அது பகுதி (b) இனைச் சார்ந்துள்ள மட்டுப்பெறுமான வரைபு தொடர்பாக மாணவர்களுக்கு போதியளவு அறிவு மற்றும் சரியான விளக்கம் கிடைக்காமை தெரிகிறது. அதனால் மாணவர்களுள் விருத்தியைச் சார்ந்த ஆரம்ப எண்ணக்கருவான ஒடுங்குதல் போன்ற அறிவை அதிகரிப்பதற்காக பொருத்தமான மேலதிக வாசித்தல்கள் மற்றும் எளிய பயிற்சிகளில் ஈடுபடுத்தல் அவசியம் என்பதைக் காண முடிகிறது.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ஓர் 2×2 தாயமெனக் கொள்வோம்.

$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \mathbf{O}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது 2×2 சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமும் $\mathbf{O}$ ஆனது 2×2 பூச்சியத் தாயமும் ஆகும்.

இதிலிருந்து, $\mathbf{A}^{-1}$ ஐக் காண்க.

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ஓர் 2×2 தாயமெனக் கொள்வோம்.

$\mathbf{BA} = \mathbf{B}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\mathbf{BC} = \mathbf{O}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக ஒரு பூச்சியமல்லாத 2×2 தாயம் $\mathbf{C}$ யைக் காண்க.

(*b*) z ஒரு சிக்கலெண்ணெனக் கொள்வோம்.

$|z|^2 = z\bar{z}$ எனவும் $|z| \geq \text{Re}\, z$ எனவும் நிறுவுக.

இதிலிருந்து, z_1, z_2 என்னும் எவையேனும் இரு சிக்கலெண்களுக்கு $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ எனக் காட்டுக.

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ என **உய்த்தறிக**.

$|z - i| < \frac{1}{2}$ எனின், $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ எனக் காட்டுக.

$|z - i| \leq \frac{1}{2}$ இற்கும் $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$ இற்கும் சிக்கலெண் z ஐ ஆகண் வரிப்படத்தில் வகைகுறிக்கும் புள்ளித் தொடையைக் கொண்ட பிரதேசம் R ஐ நிழற்றுக.

(*a*) $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(05)**

$$= \underset{\textbf{(05)}}{\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\textbf{(05)}} = \underset{\textbf{(05)}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = 0$$

[20]

$$2\mathbf{A}^{-1} = 3\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \underset{\textbf{(05)}}{3\mathbf{I} - \mathbf{A}} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **(05)**

[10]

$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$ **(05)**

[05]

$$\underset{\textbf{(05)}}{\mathbf{BA} - \mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{BC} = \mathbf{O}}, \text{ இங்கு } \mathbf{C} = \underset{\textbf{(05)}}{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{\textbf{(05)}}{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}$$

[15]

(b) $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ எனக.

$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = \left\{ \sqrt{x^2+y^2} \right\}^2 = |z|^2$. **(05)** **[05]**

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| \geq x = \operatorname{Re} z$.

(05) **(05)** **[10]**

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$$

$$= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \ \textbf{(05)}$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2}$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \ \textbf{(05)}$$

$$\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1\bar{z}_2| \ \textbf{(05)}$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||\bar{z}_2|$$

$$\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \ \textbf{(05)}$$

$$= (|z_1| - |z_2|)^2 \quad \textbf{(05)}$$

$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ **[25]**

$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \geq |z_1 + z_2| - |z_2|$

(05) **(05)**

i.e., $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **[10]**

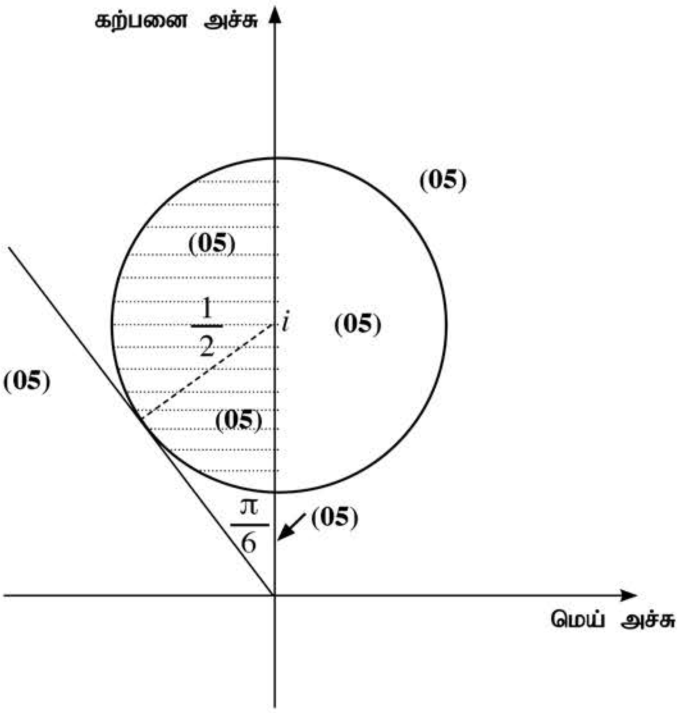
$|z| - |i| \leq |z - i| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| < \frac{3}{2}$

(05) **(05)**

$|i| - |z| \leq |i - z| = |z - i| < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - |z| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$.

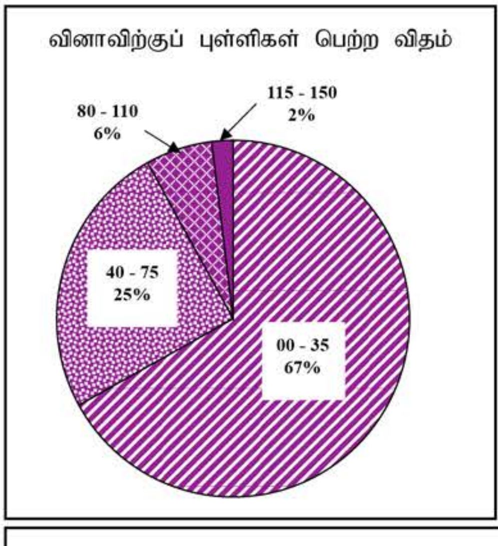
(05) **(05)**

i.e., $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. **[20]**



[30]

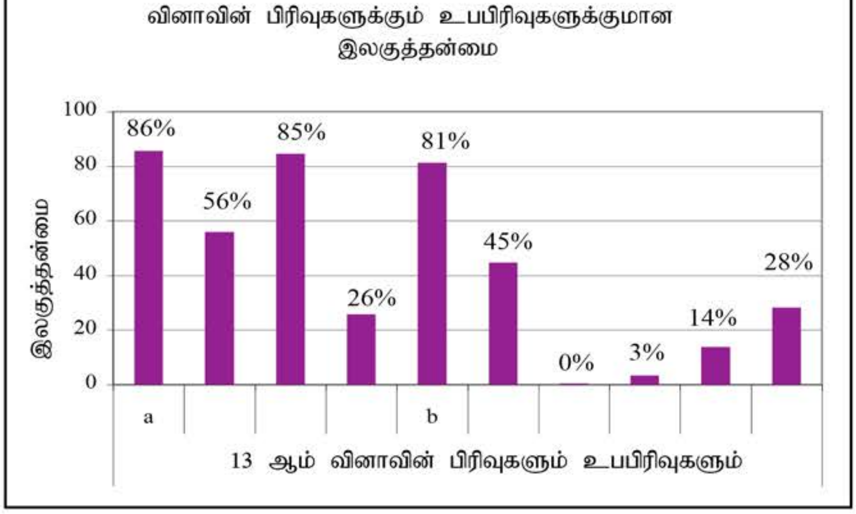
13 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 75.8% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 67%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 25%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 6%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 2%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கு 10 உபபிரிவுகள் உள்ளதோடு (b) யில் மூன்றாவது உபபகுதியினது இலகுத்தன்மை பூச்சியமாக இருந்தது. (a) யின் நான்காவது உபபிரிவிலும் (b) யின் மூன்றாவது, நான்காவது, ஐந்தாவது, ஆறாவது உபபிரிவுகளின் இலகுத்தன்மை 30% இனை விட அதிகரித்திருக்கவில்லை. எனினும் (a) யின் முதலாவது மூன்றாவது உபபகுதிகளினதும் (b) முதலாவது பகுதியினதும் இலகுத்தன்மை 80% இனை எட்டியிருந்தது. (b) யின் மூன்றாவது உபபிரிவின் இலகுத்தன்மை 0% ஆயிருந்ததைக் காண முடிந்ததுடன் எவருக்கும் அந்தப் பகுதிக்காக புள்ளிகளைப் பெற முடியாது இருந்துள்ளது.

13 (a) முதலாவது பகுதிக்காக அளிக்கப்பட்ட விடைகள் திருப்திகரமானவை. அனேகமான மாணவர்களுக்கு முதலில் பெற்றுக்கொண்ட தொடர்பை பாவித்து $\mathbf{A}$ யினது நிகர்மாற்றைக் காண்பதில் சிரமப்பட்டுள்ளனர். ஆரம்ப விடையைப் பயன்படுத்தி $\mathbf{C}$ என்ற தாயத்தைக் காண்பதில் திருப்தியாக இல்லை. $\mathbf{BA = B}$ என்பது $\mathbf{BA - B = 0,}$ அவ்வாறெனில் $\mathbf{B(A - I) = 0}$ என எழுதி அது $\mathbf{BC = 0}$ என்ற வடிவிற்கு மாற்றுவதற்கு ஈடுபடாமை அதற்குக் காரணமாகும். இந்தக் காரணத்தினால் வினாவின் இலகுத்தன்மை 26% வரை குறைவடைந்து இருந்ததுடன் இந்தப் பகுதியில் உள்ள உபபகுதிகளுள் இலகுத்தன்மை குறைந்த பகுதி இதுவாகும்.

(b) சிக்கல் எண்கள் தொடர்பாக மாணவர்களின் அட்சரகணித அறிவு மிகவும் கீழ்மட்டத்திலே உள்ளது. ஒழுக்கு மற்றும் வீச்சம் தொடர்பான அறிவு போதுமானதன்று. இதனால் இந்த வினாவின் ஆரம்ப பகுதியைத் தவிர எஞ்சிய பகுதிகளுக்காக மாணவர்கள் புள்ளிகளை பெற்றுக்கொண்டது மிகவும் சிறிய பகுதியினராவர். விடையளிக்கும் போது ஆரம்பத்தில் பெற்றுக்கொண்ட இலகுத்தன்மை ஒழுங்குமுறையில் $81\%, 45\%$ ஆனோர் பெறுபேற்றைப் பயன்படுத்தி $|Z_1| - |Z_2| \leq |Z_1 - Z_2|$ என காட்டுவதற்கு முழுமையாக தவறியிருப்பது தெரிகிறது. கற்றல் - கற்பித்தல் செயற்பாடுகளின் “சிக்கல் எண்கள்” அலகில் கூடிய அவதானம் செலுத்தாத பகுதியாகத் தெரிகிறது. சிக்கல் எண்களை சரியாகக் கொண்டு சமனிலிகளை தீர்த்தல் தொடர்பாக மாணவர்களின் திறமையின்மை மிகவும் தெளிவாகத் தெரிகிறது. இணைந்த கணிதம் I வது வினாப்பத்திரத்தின் B பகுதியின் வினாக்களுள் ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் உரிய முழுப் புள்ளிகள் 0 - 25% வீச்சின் புள்ளிகள் அதிகமாக பெற்றுக்கொண்ட வினா இதுவாகும். அவ்வாறே வினாவிற்கு உரிய புள்ளிகளின் 75-100% வீச்சில் மிகக் குறைவாக புள்ளிகளைப் பெற்றதும் இந்த வினாவாகும்.

தாயங்களின் அடிப்படை பெருக்கம் மற்றும் எளிய அட்சர கணித கூற்றுக்களை விடுவித்தல் போன்ற சிக்கலெண்கள் தொடர்பான ஆரம்ப அறிவு மற்றும் ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண்களை அட்சர கணித சமனிலி மற்றும் அட்சர கணிதக் கோவையை சுருக்குதல் தொடர்பான அறிவு மிகவும் குறைந்த மட்டத்தில் உள்ளது. அதனால் விடையளிப்பதற்காக இந்த வினாவைத் தெரிவு செய்வதற்கு எதிர்பார்த்துள்ள மாணவர்களுக்கு அவர்களில் சிக்கலெண்கள் தொடர்பாக அறிவை வளர்க்கும் பயிற்சிகளில் ஈடுபடுவதனாலும் உரிய புத்தகங்களைப் படிப்பதனாலும் எண்ணக்கருவை நினைவு படுத்திக்கொள்ளல் அவசியமாகும்.

14. (*a*) **முதற் பெறுதியை மாத்திரம்** கருதுவதன் மூலம் $\dfrac{x^3}{x^4+27}$ இன் குறைந்தபட்சப் பெறுமானத்தையும் உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானத்தையும் காண்க.

$y=\dfrac{x^3}{x^4+27}$ இன் வரைபைப் பருமட்டியாக வரைக.

இதிலிருந்து, k யின் எப்பெறுமானங்களுக்குச் சமன்பாடு $kx^4-x^3+27k=0$ ஆனது

(i) இரு ஒன்றுபடும் மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்,

(ii) மூன்று ஒன்றுபடும் மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்,

(iii) இரு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்,

(iv) மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிராது

எனக் காண்க; இங்கு k மெய்யானது.

(*b*) $AB=a$ ஆகவும் $BC=b\,(<a)$ ஆகவும் இருக்கும் ஒரு செவ்வகம் $ABCD$ யைக் கருதுவோம். P ஆனது CD மீது ஓர் இயங்கத்தக்க புள்ளியெனக் கொள்வோம். $AP+PB$ யின் நீளம் $L(x)$ ஆகும்; இங்கு $DP=x$.

$L(x)=\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{(a-x)^2+b^2}$ எனக் காட்டுக.

$L(x)$ இன் குறைந்தபட்ச (இழிவு) நீளத்தையும் இக்குறைந்தபட்ச நீளத்தை ஒத்து CD மீது P யின் தானத்தையும் காண்க.

அத்துடன் $L(x)$ இன் உயர்ந்தபட்ச நீளத்தையும் காண்க.

(a) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^4+27}$ என்க.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^4+27)-x^3(4x^3)}{(x^4+27)^2} \quad = \quad \frac{x^3(81-x^4)}{(x^4+27)^2}=0 \Rightarrow x=-3,0,3$$

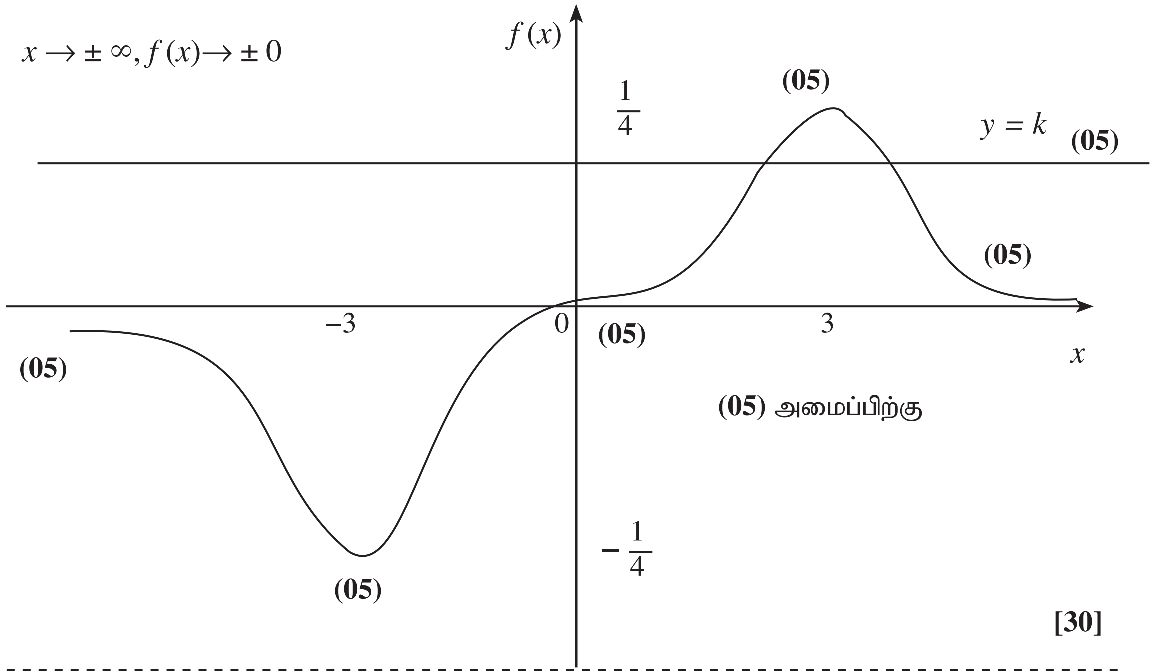
	(05)	(05)	(05)	
x இன் வீச்சு	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
		(05)	(05)	

எனவே $f(x)$ ஆனது $x=-3$ இல் இழிவும் $x=3$ இல் உயர்வையும் கொண்டிருக்கும் **(05)**

$$f(-3)=\frac{(-3)^3}{(-3)^4+27}=-\frac{1}{4}\ \textbf{(05)}, \quad f(3)=\frac{(3)^3}{(3)^4+27}=\frac{1}{4}\ \textbf{(05)}$$

எனவே $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானமும், உயர்வுப் பெறுமானமும் முறையே $-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}$ ஆகும்.

[40]



$y = k$, $y = \dfrac{x^3}{x^4 + 27}$ என்பவற்றைக் கருதுக

$y = k$ இனதும் $\dfrac{x^3}{x^4 + 27}$ இனதும் இடை வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகள் $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும். **(05)**

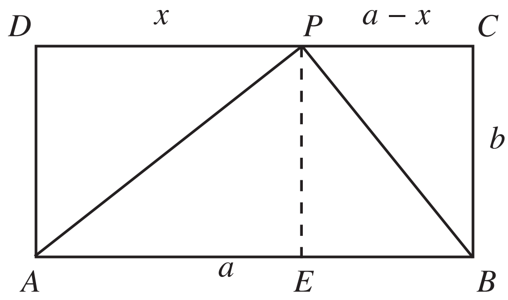
எனவே,

(i) $k = -\dfrac{1}{4}$ அல்லது $\dfrac{1}{4}$, ஆகும் போது $y = k$ என்னும் கோடும் $y = \dfrac{x^3}{x^4 + 27}$ என்னும் வளையியும் தொடும். எனவே $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு பொருந்தும் மெய்மூலங்கள் இருக்கும். **(05)**

(ii) $k = 0$ ஆகும் போது $y = k$ என்னும் கோடு $y = \dfrac{x^3}{x^4 + 27}$ என்னும் வளையின் ஊடு செல்லும் எனவே $kx^4 - x^3 + 27k = 0,\ x^3 = 3$ என ஒடுங்கும். எனவே இச்சமன்பாடு மூன்று பொருந்தும் மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும். **(05)**

(iii) $-\dfrac{1}{4} < k < 0$ அல்லது $0 < k < \dfrac{1}{4}$, ஆகும் போது $y = k$ கோடும் $y = \dfrac{x^3}{x^4 + 27}$ என்னும் வளையியும் இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டும் எனவே $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ என்னும் சமன்பாடு இரு வெவ்வேறு மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும். **(05)**

(iv) $k < -\dfrac{1}{4}$ அல்லது $k > \dfrac{1}{4}$ ஆகும் போது $y = k$ என்னும் கோடும் $y = \dfrac{x^3}{x^4 + 27}$ என்னும் வளையியும் இடைவெட்டாது. எனவே $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை. **(05)** **[30]**



$(b)\ L(x) = AP + PB$ **(05)**

$= \sqrt{AE^2 + EP^2} + \sqrt{BE^2 + EP^2}$

$= \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$ **(05)**

[10]

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} \ \textbf{(05)}$$

$$= \frac{x\sqrt{(a-x)^2+b^2} - (a-x)\sqrt{x^2+b^2}}{\sqrt{x^2+b^2}\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$$

$$= 0 \Rightarrow x\sqrt{(a-x)^2+b^2} - (a-x)\sqrt{x^2+b^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2\left\{(a-x)^2+b^2\right\} = (a-x)^2\left\{x^2+b^2\right\} \Rightarrow x^2 = (a-x)^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2}.\ (05)$$

x இன் வீச்சு	$0 \le x < \frac{a}{2}$	$x = \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} < x \le a$
$L'(x)$	$-$	0	$+$

(05)

$x = \frac{a}{2}$ **ஆக** $L(x)$ இழிவாகும் **(05)**

இழிவு நீளம் $= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 4b^2}$.

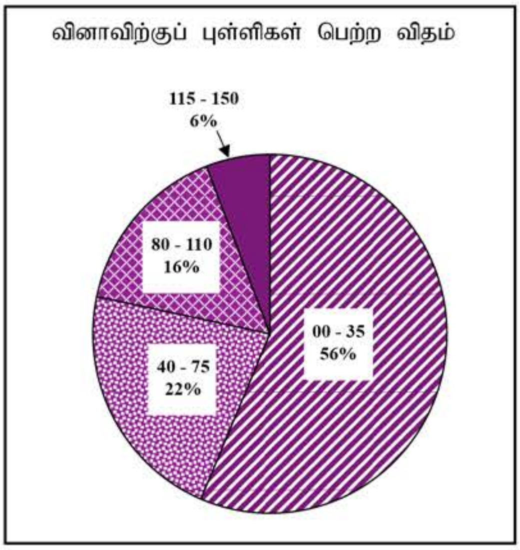
(05) (05)

P ஆனது CD இன் நடுப்புள்ளியாகும் போது இது நடைபெறும் (05) **[35]**

P, C இல் அல்லது D இல் உள்ள போது $L(x)$ ஆனது உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொண்டிருக்கும்

$L(x) = b + \sqrt{a^2 + b^2}$ **(05).** **[05**

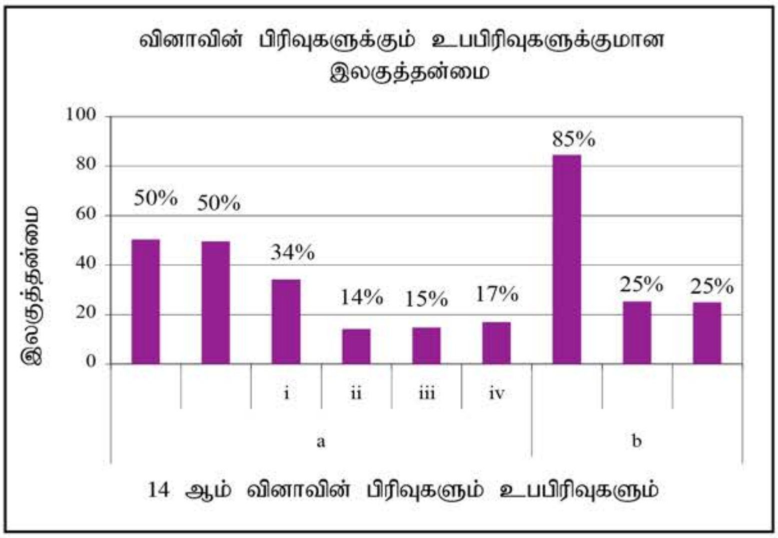
14 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 67.7% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 56%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 22%
80- 110 புள்ளி ஆயிடையில் 16%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 6%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கு 9 உபபகுதிகள் உள்ளதோடு அவற்றுள் 50% குறையாது இருப்பது மூன்று உபபிரிவுகளுக்கு மட்டுமாகும். (a)யின் (ii),(iii),(iv) உபபகுதிகளின் இலகுத்தன்மை 20% இலும் குறைவு. (b) யின் இலகுத்தன்மை உச்சமாக இருந்ததோடு அது 85% ஆகும். குறைந்த இலகுத்தன்மை (a) (ii) உபபகுதியில் இருந்ததுடன் அது 14% மட்டுமாகும்.

(a) எண்களை வகுக்கும் போது பகுதி எண் பூச்சியமாக இருக்க முடியாது என்பதை கவனத்திற் கொள்ளாமையினால் அதிகமான பரீட்சார்த்திகள் $x \neq 0$ என எடுத்தமையினால் அல்லது $x = 0$ என்ற சந்தர்ப்பத்தைக் கருதாது விட்டிருந்தமையினால் ஒவ்வொரு நிலைத்த புள்ளியை பெற்றுக் கருதாமையினால் விபத்துப் புள்ளியை பெறவில்லை. (ii), (iii), (iv) ம் பகுதிகளில் அநேகமான விடை சரியாகவும் பூரணமாகவும் காட்டவில்லை. (ii) ஆம் பகுதியிலே மெய் மூலகங்கள் மூன்றைக் கொண்ட குணகங்கள் தொடர்பான விளக்கம் இல்லை. தரப்பட்ட வளையியில் கேத்திர கணித அமைப்பு தொடர்பாக போதிய விளக்கமின்மையினால் இந்தப் பகுதிக்கு உரித்தாவதற்குக் காரணமாக அமைந்தது.

(b) $\mathrm{L}(x)$ இனை சரியாக கூறியிருப்பினும் வகையிட்டதன் பின்பு பெறக்கூடிய சார்பு சிக்கலானதாக நிலைத்த பெறுமதியை சரியாக பெறுவதற்கு சிரமப்பட்டுள்ளனர். $\mathrm{L}(x)$ இன் உச்ச பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு போதிய தர்க்கரீதியான விளக்கம் இல்லாது இருந்தது.

I ஆம் பத்திரத்திலே B பகுதியின் வினாக்களில் மாணவர்கள் குறைவாக தெரிவு செய்யப்பட்ட வினா இதுவாகும். மாணவர்களுக்கு இந்த வினாவின் (a) பகுதியின் (ii), (iii), (iv) உப பகுதிகளில் குறைவாகப் பெற்றிருந்தனர். இந்தக் காரணத்தினால் இந்தப் பகுதியினது இலகுத்தன்மை மிகக் கீழ்மட்டத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருந்தது.

அட்சரகணித சார்பு மற்றும் வரைபுகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் கட்டி எழுப்புவதில் அனேகமான மாணவர்களுக்கு கஷ்டமாக இருந்தது. வகையீட்டினைப் பாவித்து வரைபின் பல்வேறு புள்ளிகளை அறிந்துகொள்வது தொடர்பான அறிவு திருப்தியில்லாமை தெரிகிறது. சார்பு மற்றும் அதன் வகையீட்டு குணகத்தைப் பாவித்து சார்பின் வரைபினை வெட்டுவது, அணுகிச் செல்வது (இருப்பின்) நிலைத்த புள்ளிகளை அறிந்து கொள்ளும் திறமை x இன் ஒரு பிரதேசத்தினுள் சார்பின் நடத்தையைப் பாவித்து அடுத்துள்ள பிரதேசங்களில் சார்பின் நடத்தை இருக்கக் கூடிய முறையை அறிவதை உதாரணமாகக் கொண்டு விருத்தி செய்துகொள்ளல் அவசியமாகும். வளையியின் பரும்படிப் படத்தை வரைதயும் திறமை மற்றும் தரப்பட்ட சார்பின் கேத்திர கணித அமைப்பு தொடர்பான விளக்கத்தை அவர்கள் வளர்த்துக்கொள்ளல் வேண்டும்.

15. *(a)* $\displaystyle\int_0^{\pi}(\sin^3 x-\cos^3 x)\,dx=\frac{4}{3}$ எனக் காட்டுக.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக $\displaystyle\int x^3\tan^{-1}x\,dx$ ஐக் காண்க.

(c) பகுதிப் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தி $\displaystyle\int\frac{2x^2-3}{(x-2)^2\,(x^2+1)}\,dx$ ஐக் காண்க.

(a) $$\int_0^{\pi}\left(\sin^3x-\cos^3x\right)dx=\int_0^{\pi}\left\{(1-\cos^2x)\sin x-(1-\sin^2x)\cos x\right\}dx \quad \textbf{(05)}$$

$$=\left[-\cos x+\frac{\cos^3x}{3}-\sin x+\frac{\sin^3x}{3}\right]_0^{\pi}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

(05) (05) (05) (05) (05) [30]

மாற்றுமுறை:

(a) $$\int_0^{\pi}\left(\sin^3x-\cos^3x\right)dx=\int_0^{\pi}(\sin x-\cos x)(\sin^2x+\sin x\cos x+\cos^2x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\sin x-\cos x\right)(1+\sin x\cos x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\sin x+\sin^2x\cos x-\cos x-\cos x^2\sin x)\,dx \quad \textbf{(05)}$$

$$=\left[-\cos x+\frac{\sin^3x}{3}-\sin x+\frac{\cos^3x}{3}\right]_0^{\pi}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

(05) (05) (05) (05) (05) [30]

(b) $\int x^3 \tan^{-1} x\,dx = \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$

(05) **(05)**

$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\int \frac{(x^2+1)^2-(2x^2+1)}{1+x^2}\,dx$

(10)

$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\int (x^2+1)\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{2(x^2+1)-1}{1+x^2}\,dx$

(10)

$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}+x\right) + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+x^2}$

(05) **(05)**

$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}+x\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\tan^{-1} x + C$; இங்கு C ஓர் ஏதேச்சை ஒருமை

(10)

[50]

(c) $\frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$, இங்கு $A, B\ C, D$ துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகள்

(05) **(05)** **(05)**

$2x^2 - 3 \equiv A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2$.

$x = 2$ என இட $B = 1$. **(05)**

ஒருமை உறுப்பை ஒப்பிட $-3 = -2A + B + 4D$.

x^3 இன் குணகத்தை ஒப்பிட $= A + C$.

x இன் குணகத்தை ஒப்பிட $= A + 4C - 4D$. **(10)**

$B = 1$ என $-3 = -2A + B + 4D$ இல் பிரதியிட $-2 = -A + 2D \to (1)$.

$C = -A$ என $0 = A + 4C - 4D$ இல் பிரதியிட $0 = 3A + 4D \to (2)$.

(1) , (2) இலிருந்து $D = -\frac{3}{5}$, $A = \frac{4}{5}$.

(05) **(05)**

$C = -\frac{4}{5}$ **(05)**

$$\frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{4}{5(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{4x+3}{5(x^2+1)}.$$

$\int \frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)}\,dx = \frac{4}{5}\int \frac{dx}{(x-2)} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{1}{5}\int \frac{4x+3}{(x^2+1)}\,dx$ **(05)**

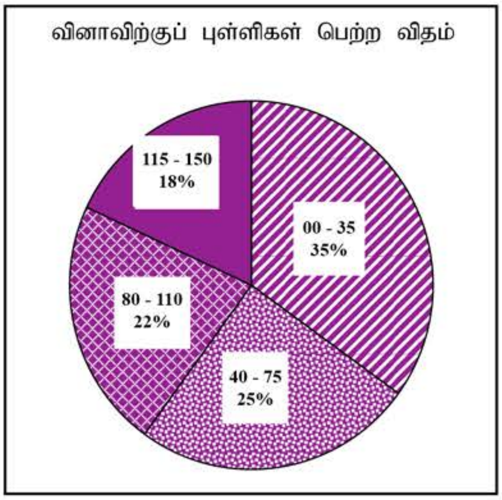
$= \frac{4}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{5}\int \frac{2x}{(x^2+1)}\,dx - \frac{3}{5}\int \frac{dx}{(x^2+1)}$

(05) **(05)**

$= \frac{4}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{5}\ln(x^2+1) - \frac{3}{5}\tan^{-1} x + K$; இங்கு K ஓர் ஏதேச்சை ஒருமை

(10) **[70]**

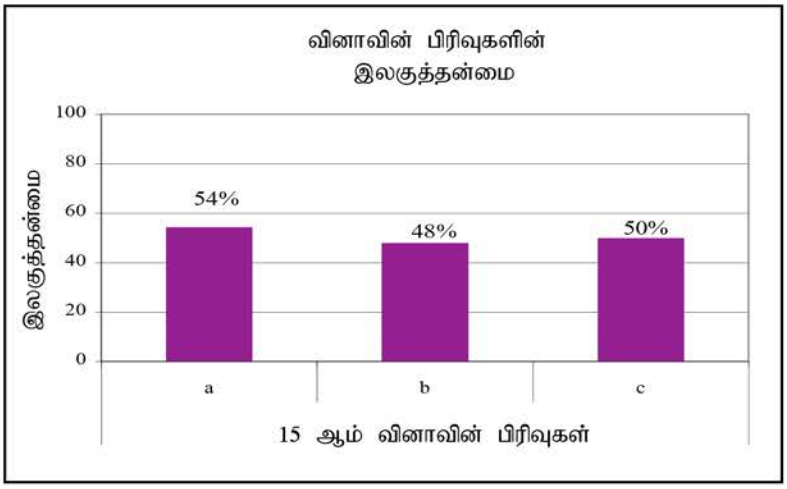
15 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 93.5% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 35%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 25%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 22%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 18%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கு 3 பகுதிகள் உள்ளதோடு (b) பகுதியைத் தவிர ஏனைய சகல பகுதிகளினதும் இலகுத்தன்மை 50% இலும் அதிகமாகும். (a) பகுதியின் இலகுத்தன்மை உயர்வாக இருப்பதுடன் அது 54% ஆகும். குறைந்த இலகுத்தன்மை காணப்படுவது (b) பகுதியாவதுடன் அதன் இலகுத்தன்மை 48% ஆகும். $(a), (b), (c)$ என்ற மூன்று பகுதிகளினதும் இலகுத்தன்மை 48%-54% வீதத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருப்பது தெளிவாகத் தெரிகிறது.

15. (a) விடை எழுதும் போது மாணவர்கள் எளிய மற்றும் சுருக்கமான முறைக்காக நீண்ட முறையை பாவிப்பதற்கு முயற்சித்து இருந்தனர். தெளிவாகத் தெரியும் இரு கனங்களின் வித்தியாசமாகக் காரணிப்படுத்துவதன் மூலம் தரப்பட்ட தொகையீட்டை கருதுவதனால் மிகவும் இலகுவாகவும் சரியாகவும் விடையைப் பெற்றிருக்க முடியும்.

(b) பகுதியாக தொகையிடும் முறை, மற்றும் மேலும் தேவையான பகுதிகளாக்கப்படக் கூடிய வகையிடும் நுட்ப முறைகளை சரியாக பாவிக்கவில்லை.

(c) தரப்பட்ட முறையான பின்னத்தை தொகையிடக் கூடிய முறையில் உரிய முறைமையின் பின்னங்கள் சிலவற்றை மாற்றீடாக காட்டுவதன் மூலம் முறைமையான கோவைகளைச் சுருக்கும் போது பின்னங்களின் மாறிகளின் பெறுமானங்களை சரியாகப் பெற்றுக்கொள்ளும் திறமையை மாணவர்களிடம் வளர்த்திராமையினால் இந்தப் பகுதிக்கு சரியான விடையைப் பெறமுடியாது இருந்தது. இந்தக் குறைபாடு காரணமாக வினாவினது இலகுத்தன்மை மிகவும் குறைந்த மட்டத்தில் காணப்பட்டது.

அட்சரகணித பின்னங்களைச் சுருக்குவதில் பின்னடைவை அதிகமாகக் காண முடிந்தது. க.பொ.த.(சா.த) மட்டத்தில் அது தொடர்பாக பெற்றுக்கொண்ட அறிவு சிக்கலான பயிற்சிகளைச் சரியாகப் பயன்படுத்தும் திறமை போதியதாக இல்லாமை மற்றும் அதன் அறிவை தற்காலிகமாக நினைவில் வைத்திராமை போன்றவை இவ்வகையான வினாக்களுக்கு சரியான விடையை அளிப்பதற்குரிய வசதிகள் இலகுவாகும் என்பதனால் அதனை விருத்தி செய்யக்கூடிய பயிற்சிகளை மாணாக்கர்களுக்கு வழங்குவது அவசியமாகும்.

16. (a) $l_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1=0,\ l_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ என்னும் இரு சமாந்தரமல்லாத நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$2x-11y-10=0,\ 10x+5y-2=0$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறாக்கியானது $4x-7y-8=0,\ 8x+y-4=0$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள விரிகோணத்தின் இருகூறாக்கியெனக் காட்டுக.

(b) g, f ஆகியவற்றின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் வட்டம் $x^2+y^2+2gx+2fy-r^2=0$ ஆனது வட்டம் $x^2+y^2-r^2=0$ இன் பரிதியை இருகூறிடுகின்றதெனக் காட்டுக.

நேர்கோடு $y+5=0$ ஐத் தொட்டுக்கொண்டும் வட்டம் $x^2+y^2-4=0$ இன் பரிதியை இருகூறிட்டுக்கொண்டும் புள்ளி $(1, 1)$ இனூடாக இரு வட்டங்களை வரையலாமெனக் காட்டுக.

இவ்விரு வட்டங்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(a) இரு நேர்கோடுகளிலிருந்தும் ஒரே தூரத்தில் உள்ள புள்ளி $P_0\,(x_0, y_0)$ என்க.

P_0 இலிருந்து $l_1=0,\ l_2=0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்குரிய செங்குத்து தூரங்கள் முறையே

$$\frac{|a_1x_0+b_1y_0+c_1|}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}},\ \frac{|a_2x_0+b_2y_0+c_2|}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}$$ ஆகும்.

(05) **(05)**

தூரங்கள் சமம் ஆகையால்

$$\frac{|a_1x_0+b_1y_0+c_1|}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}=\frac{|a_2x_0+b_2y_0+c_2|}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}$$ **(05)**

m, n என்பவற்றின் தனிப் பெறுமானங்கள் சமம் எனில், $n=m$ அல்லது $n=-m$

இதிலிருந்து $$\frac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}=\pm\frac{a_2x_0+b_2y_0+c_2}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}.$$

எனவே $l_1=0,\ l_2=0$ எனும் நேர்கோடுகளிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள புள்ளியின்

ஆள்கூறு $$\frac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}=\pm\frac{a_2x_0+b_2y_0+c_2}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}$$ எனும் சமன்பாடுகளை திருப்தி செய்யும் **(05)**

$P\,(x,y)$ ஒருமாறும் புள்ளி எனின், P இலிருந்து $l_1=0,\ l_2=0$ எனும் நேர்கோடுகளுக்கான தூரம் சமம் எனின், P எனும் மாறும் புள்ளி $l_1=0,\ l_2=0$ எனும் நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தில் இருகூறாக்கியில் இருக்கும். எனவே கோண இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்.

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}.$$ **(05)** **[25]**

$2x-11y-10=0$, $10x+5y-2=0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் $$\frac{2x-11y-10}{\sqrt{2^2+(-11)^2}}=\pm\frac{10x+5y-2}{\sqrt{10^2+5^2}}.$$ **(05)**

$2x-11y-10=\pm(10x+5y-2)\Rightarrow x+2y+1=0$ அல்லது $2x-y-2=0$

(05) (05)

$2x-11y-10=0$, $x+2y+1=0$ என்னும் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\tan\theta=\left|\frac{\frac{2}{11}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(\frac{2}{11}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\frac{3}{4}<1 \quad \textbf{(05)}$$

(05)

எனவே $2x-11y-10=0$, $10x+5y-2=0$ என்னும் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட

கூர்ங்கோண இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் $x+2y+1=0$ ஆகும்.

$4x-7y-8=0$, $8x+y-4=0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்களின் இருகூறாக்கியின் சமன்பாடு $\dfrac{4x-7y-8}{\sqrt{4^2+(-7)^2}}=\pm\dfrac{8x+y-4}{\sqrt{8^2+1^2}}$ **(05)**

$4x-7y-8=\pm(8x+y-4)\Rightarrow x+2y+1=0$, $2x-y-2=0$

(05) (05)

$4x-7y-8=0$, $x+2y+1=0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் Φ என்க.

$$\tan\phi=\left|\frac{\frac{4}{7}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\frac{3}{2}>1 \quad \textbf{(05)}$$

எனவே $4x-7y-8=0$ හා $8x+y-4=0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட

விரிகோணஇருகூறாக்கியின் சமன்பாடு $x+2y+1=0$ ஆகும். **(05)** **[50]**

$x^2+y^2+2gx+2fy-r^2=0$ හා $x^2+y^2-r^2=0$ என்னும் வட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளி $P_0(x_0,y_0)$ என்க

ஆகவே $x_0{}^2+y_0{}^2+2gx_0+2fy_0-r^2=0\rightarrow(1)$, $x_0{}^2+y_0{}^2-r^2=0\rightarrow(2)$

$(1)-(2)\Rightarrow 2gx_0+2fy_0=0\Rightarrow gx_0+fy_0=0$ **(05)**

எனவே இடைவெட்டும் புள்ளி $gx+fy=0$ எனும் நேர்கோட்டில் இருக்கும் **(05)**

நேர்கோடு உற்பத்தியின் ஊடாக செல்வதனாலும் உற்பத்தி $x^2+y^2-r^2=0$ என்னும் வட்டத்தின் மையமாக இருப்பதனாலும் எல்லா g,f பெறுமானங்களுக்கும் $x^2+y^2+2gx+2fy-r^2=0$ என்னும் வட்டம் $x^2+y^2-r^2=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை சமகூறிடும் **(05)** **[15]**

எல்லா g, f பெறுமானங்களுக்கும் $x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ என்னும் வட்டம் $x^2+y^2-4=0$ வட்டத்தின் பரிதியை சமகூறிடும் **(05)**

$x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ என்னும் வட்டத்தின் ஆரை $=\sqrt{g^2+f^2+4}$ **(05)**

மையம் $(-g,-f)$ இலிருந்து $y+5=0$ என்னும் நேர்கோட்டிற்கான செங்குத்துத் தூரம் $|-f+5|$ **(05)**

$y+5=0$ என்னும் கோட்டை $x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ என்னும் வட்டம் தொடுவதால்

$$\sqrt{g^2+f^2+4}=|-f+5| \Rightarrow g^2+f^2+4=f^2-10f+25 \Rightarrow g^2+10f-21=0 \rightarrow (1)$$

(05)

$x^2+y^2+2gx+2fy-4=0$ என்னும் வட்டம் $(1, 1)$ இனூடு செல்வதால்

$1+1+2g+2f-4=0 \Rightarrow g+f=1$

(05)

$g+f=1$ என இல் (1) பிரதியிட

$g^2-10g-11=0 \Rightarrow (g-11)(g+1)=0 \Rightarrow g=11$ அல்லது -1

(05) **(05)**

$g=11$ ஆக $f=-10$ ஆகும். **(05)**

$g=-1$ ஆக $f=2$ ஆகும். **(05)**

g, f என்பவற்றுக்கு இரு சோடிப் பெறுமானங்கள் இருப்பதனால் இரு வட்டங்கள் உண்டு **(05)** **[50]**

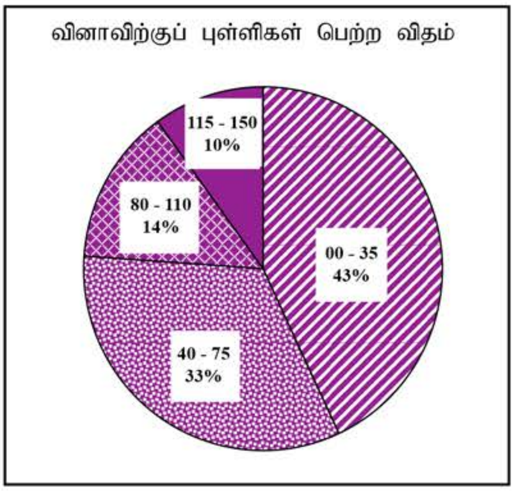
வட்டத்தின் சமன்பாடுகள்

$x^2+y^2+22x-20y-4=0$, $x^2+y^2-2x+4y-4=0$

(05) **(05)** **[10]**

---

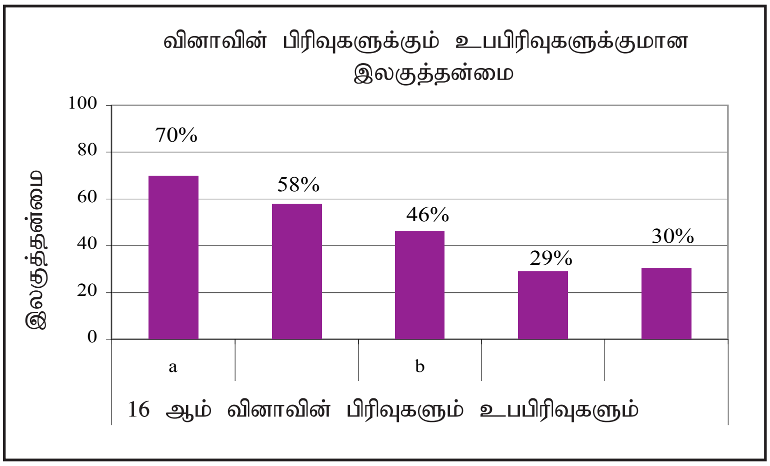
16 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 69.2% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 43%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 33%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 14%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 10%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இலகு 5 உபபிரிவுகள் உள்ளதோடு (b) யின் இரண்டாவது உபபகுதியைத் தவிர ஏனைய சகல உபபகுதிகளுக்காகவும் 30%த்தினை விட கூடிய புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர். அந்தப் பகுதிக்காக 29% மானோர் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.

(a) யின் முதலாவது உபபகுதிக்கு அதிக புள்ளிகளைப் பெற்றிருப்பதுடன் அது 70% ஆகும்

16. (a) கோணங்களின் இரு கூறாக்கியின் சமன்பாட்டை எழுதும் போது சாதாரண சமன்பாட்டை எழுதி இராததோடு கூர்ங்கோண இருகூறாக்கி மற்றும் விரிகோண இருகூறாக்கி ஆகியவற்றை வேறுபடுத்துவதற்கு போதிய திறமை இல்லை.

(b) பொதுப்புள்ளியைக் கருதாது நேரடியாகவே உரிய சமன்பாட்டைப் பெற்றுள்ளனர். அநேகமான மாணவர்கள் நீண்ட முறையைப் பயன்படுத்தி இந்த வினாவிற்கு விடையளிக்க முயற்சித்துள்ளனர். இந்த வினாவின் இரு பகுதிகளிலும் ஆரம்பத்தில் தரப்பட்டுள்ள தத்துவப் பகுதி அதன் பின் தரப்பட்டுள்ள பயிற்சிக்கு விடையளிப்பதற்காக பயன்படுத்தப்பட்டிருப்பின் மிகவும் இலகுவாக விடையை அண்மித்திருக்க முடியும். அதிலும் அநேக மாணவர்கள் நீண்ட முறையைப் பயன்படுத்தி விடையளிக்க முயற்சி செய்திருந்ததோடு அதன் மூலம் இறுதி விடைக்கு அண்மிப்பதற்குக் காரணமான பின்னடைவினால வினாவின் இலகுத்தன்மை கீழ்மட்டத்தில் காணப்பட்டது.

ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணிதத்திலே சாதாரண சமன்பாட்டைப் பெறுதல் தொடர்பான ஆரம்ப தத்துவங்கள் மற்றும் விடய அறிவு தொடர்பான அறிவு மற்றும் அந்த அறிவைப் பயன்படுத்தும் திறன் போதியதாக இல்லாமையினால் அந்த அறிவு மற்றும் திறமையை அதிகரிக்கக் கூடியவாறு கற்றல் வினாக்களை மாணவர்களுக்கு பெற்றுக்கொடுக்க வேண்டும்.

17. (a) ஒரு முக்கோணி ABC யிற்கு, வழக்கமான குறிப்பீட்டில்,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

என நிறுவுக.

$a=(b-c)\cos\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$ என உய்த்தறிக.

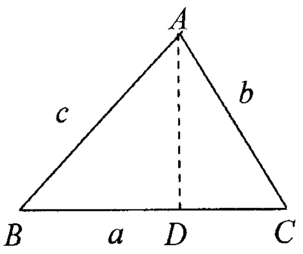
(b) θ வின் எந்த மெய்ப் பெறுமானத்திற்கும் கோவை $\tan\theta-2\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ ஆனது -7 இற்கும் 1 இற்குமிடையே எந்தப் பெறுமானத்தையும் எடுக்க முடியாதெனக் காட்டுக.

(c) $5\cos^2\theta+18\cos\theta\sin\theta+29\sin^2\theta$ ஐ வடிவம் $a+b\cos(2\theta+\alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b ஆகியன மாறிலிகளும் α ஆனது θ வைச் சாராத ஒரு கோணமும் ஆகும்.
இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமன்பாடு

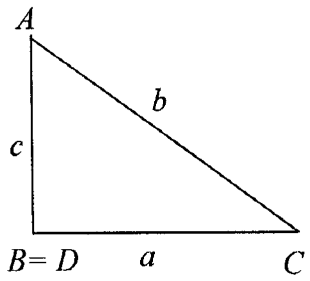
$$8(\cos x+\sin x)^2+2(\cos x+5\sin x)^2=19$$

இன் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

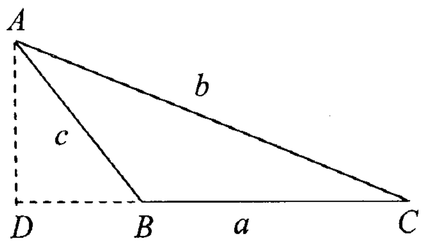
(a)



(i) ABC ஒரு கூர்கோண முக்கோணம்



(ii) ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம்



(iii) ABC ஒரு விரிகோண முக்கோணம்

$AD=AB\sin B=AC\sin C$, $AD=AB\sin B=AC\sin C$, $AD=AB\sin(\pi-B)=AC\sin C$

$\therefore \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, **(05)** $\therefore \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, **(05)** $\therefore \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ **(05)**

இதேபோல் $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,என நிறுவலாம் **(05)**

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ **[20]**

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b-c}{\sin B-\sin C}$. **(05)**

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{b-c}{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}=\frac{b-c}{2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

(05) **(05)** **(05)**

$a=(b-c)\cos\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$. **(05)** **[25]**

(b) $k=\tan\theta-2\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ என்க.

$$=\tan\theta-2\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{\tan^2\theta-\tan\theta+2}{1+\tan\theta}$$

(05)

$\tan^2\theta-(k+1)\tan\theta+2-k=0$ **(05)**

இச்சமன்பாடு மெய்த்தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்கும் ஆயினாயின் $(k+1)^2-4(2-k)\geq 0$ **(05)**

i.e. $\Leftrightarrow\ k^2+6k-7\geq 0$ **(05)**

i.e. $\Leftrightarrow\ (k+7)(k-1)\geq 0$ **(05)**

i.e. $\Leftrightarrow\ k\leq -7$ அல்லது $k\geq 1$ **(05)**

எனவே θ எந்த ஒரு மெய்ப்பெறுமானத்திற்கும் கோவை $\tan\theta-2\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ஆனது

-7 இற்கும் 1 இற்கும் இடையே எந்த பெறுமானத்தை எடுக்காது **[30]**

(c) $5\cos^2\theta+18\cos\theta\sin\theta+29\sin^2\theta$

$=\dfrac{5}{2}(1+\cos 2\theta)+9\sin 2\theta+\dfrac{29}{2}(1-\cos 2\theta)$ **(05)**

$=17-12\cos 2\theta+9\sin 2\theta$

$=17-15\left(\dfrac{4}{5}\cos 2\theta-\dfrac{3}{5}\sin 2\theta\right)$ **(05)**

$=17-15(\cos\alpha\cos 2\theta-\sin\alpha\sin 2\theta)$; இங்கு $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ மற்றும் $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ ஆகும்

(05) **(05)**

$=17-15\cos(2\theta+\alpha)$; இங்கு $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ மற்றும் $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ ஆகும்

(05)

$=a+b\cos(2\theta+\alpha)$; இங்கு $a=17$, $b=-15$ ஆவதோடு α ஆனது $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

ஆகும் **[25]**

$8(\cos x+\sin x)^2+2(\cos x+5\sin x)^2=19$

$8(\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x)+2(\cos^2 x+10\cos x\sin x+25\sin^2 x)=19$

(05) **(05)**

$10\cos^2 x+36\cos x\sin x+58\sin^2 x=19$ **(05)**

$5\cos^2 x+18\cos x\sin x+29\sin^2 x=\dfrac{19}{2}$ **(05)**

$17-15\cos(2x+\alpha)=\dfrac{19}{2}$; ஆனது $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ ஆகும்

(05) **(05)**

$15\cos(2x+\alpha)=17-\dfrac{19}{2}=\dfrac{15}{2}$ **(05)**

$\cos(2x+\alpha)=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$ இங்கு n ஒரு முழு எண்

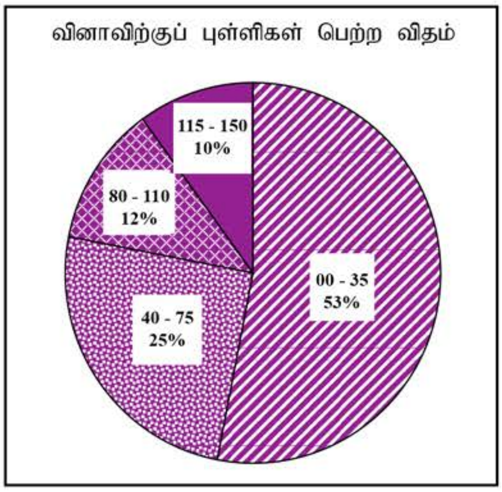
(05) **(05)**

$x=n\pi-\dfrac{\alpha}{2}\pm\dfrac{\pi}{6}$; இங்கு n ஒரு முழு எண் ஆகவும் ஆனது $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$

$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ ஆகுமாறு உள்ளது. **(05)** **[50]**

---

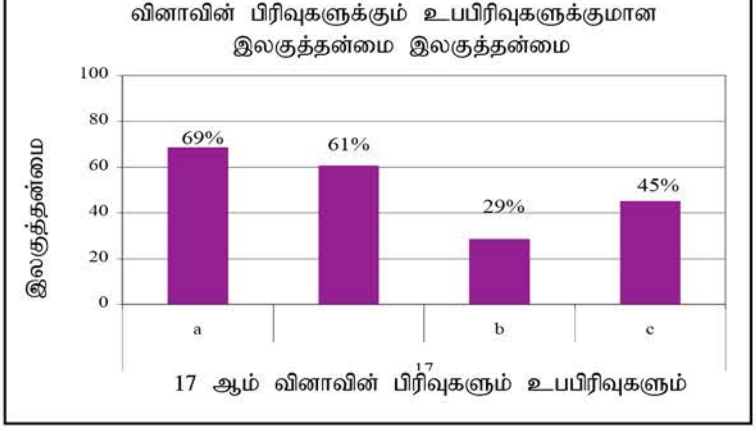
17 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 84.9% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 53%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 25%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 12%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 10%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இந்தப் பகுதியில் 4 உபபிரிவுகள் உள்ளதோடு (b) பகுதியைத் தவிர மற்றைய சகல பகுதிகளுக்காகவும் 30%இற்கு அதிகமான புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர். அந்தப் பகுதிக்காக 29% த்தினர் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.

(a) யின் முதலாவது பகுதிக்காக அதிக புள்ளிகள் பெறப்பட்டுள்ளதோடு அது 69% ஆகும்.

17. (*a*) அநேகமான மாணவர்கள் கூர்ங்கோண, செங்கோண, விரிகோண முக்கோணிகளைக் கீறி இருப்பினும் அந்த முக்கோணிகளின் செங்கோணம் அல்லது விரிகோணம் ஆகியவற்றைக் கருதாது கூர்ங்கோணத்தை மட்டும் கருதி $\sin$ சூத்திரத்தை நிறுவி இருந்தனர்.அதன் மூலம் அந்த விடையைக் கண்டு செங்கோண மற்றும் விரிகோண முக்கோணிகளுக்கான சைன் சூத்திரத்தின் நிறுவலை முன்வைக்கவில்லை.

(*b*) தரப்பட்ட கூற்றைச் சரியாகச் சுருக்கி $\tan\theta$ இற்கான இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தயாரிப்பதன் பலவீனம் மற்றும் அதன் மூலம் பெறப்படும் சமன்பாட்டின் மூலகங்களின் மெய்ப்பெறுமானங்கள் ஆவதற்கான தேவைப்பாடுகளை சரியாக இனங்கண்டு கொள்ளாமையினால் வினாவின் இலகுத்தன்மை 29% வீதத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருந்தது.

(*c*) இந்தப் பகுதியில் எழுதியிருந்த அதிகமான விடைகளில் a, b, α இன் பெறுமானங்கள் குறிப்பிடப்பட்டிருக்காமையினால் விடை பூரணமாக இராமைக்குக் காரணமாகும். இங்கு இறுதிப் பகுதிக்கு விடை எழுதும்போது முதல் பகுதியில் உள்ள தொடர்பை பெற்றிருக்காமையினால் வினாவின் இலகுத்தன்மை 30%மான கீழ் மட்டத்தில் காணப்பட்டது.

முக்கோணிகளுக்குரிய ஆரம்ப தத்துவம் தொடர்பாக சரியான அறிவு மற்றும் விளக்கம் போதியளவு மாணவர்களிடையே காணப்படாமையினால் வினாவின் இறுதிப் பகுதிக்கு விடை எழுதும் போது முதல் பகுதிகளில் பெற்றுக்கொண்ட பெறுபேற்றைப் பாவித்து இராமையினால் மாணவர்களின் விடை திருப்திகரமான மட்டத்தை அடைந்து இருக்கவில்லை. எனினும் ஆரம்ப திரிகோணகணித தத்துவங்கள் தொடர்பான அறிவு விருத்தியாகுமாறும் ஒரு பெறுபேற்றில் இருந்து இன்னுமொரு பெறுபேற்றை உய்த்தறியக்கூடிய திறனைப் பெறுமாறு பொருத்தமான பயிற்சிகளை மாணவர்களுக்கு தொடர்ந்து வழங்குதல் அவசியமாகும்.

2.2 **வினாப்பத்திரம் II இற்கு விடையளிக்கப்பட்டமை தொடர்பான விபரங்கள்**

2.2.1 **வினாப்பத்திரம் II - கட்டமைப்பு**

வினாப்பத்திரம் **II** நேரம் 03 மணித்தியாலங்கள். மொத்தப் புள்ளிகள் 100

★ இவ்வினாத்தாள் **இரண்டு** பகுதிகளைக் கொண்டது.

பகுதி A
10 வினாக்கள் உள்ளன. எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுத வேண்டும்
ஒரு வினாவுக்கு 25 புள்ளிகள் வீதம் 250 புள்ளிகள்

பகுதி B
ஏழு வினாக்கள் உள்ளன. ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுத வேண்டும்.
ஒரு வினாவுக்கு 150 புள்ளிகள் வீதம் 750 புள்ளிகள்

வினாத்தாள் II இற்கு மொத்தப் புள்ளி $(250+750)\div 10 = 1000 \div 10 = 100$ புள்ளிகள்

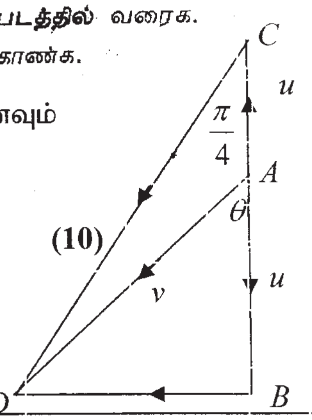
★ பரீட்சையில் A பகுதிக்கு வினாத்தாளிலேயே ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் விடை எழுத வேண்டும்.

2.2.2. **வினாப்பத்திரம் II - எதிர்பார்க்கப்பட்ட விடைகள், புள்ளி வழங்கும் திட்டம், விடையளித்தல் தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்**

(10) இணைந்த கணிதம் II - பகுதி A

வினா 1

1. தெற்கு நோக்கி ஒரு நேரிய வீதி வழியே கதி $u\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ உடன் ஓடுகின்ற சிறுவன் ஒருவன் காற்று மேற்கு நோக்கி வீசுவதை உணர்கின்றான். வடக்கு நோக்கி ஒரு நேரிய வீதி வழியே அதே கதியுடன் அவன் ஓடும்போது காற்று தென்மேற்கு நோக்கி வீசுவதை உணர்கின்றான். காற்றின் இயக்கங்களுக்கான தொடர்பு வேகங்களின் வேக முக்கோணிகளை **ஒரே வரிப்படத்தில்** வரைக.
இதிலிருந்து, காற்றின் உண்மைக் கதியையும் திசையையும் காண்க.



காற்றின் உண்மைக் கதி v எனவும், அதன் திசை θ எனவும் கொள்க.

$DB = 2u\tan\frac{\pi}{4} = 2u$ **(05)**

$v = \sqrt{(2u)^2 + u^2} = \sqrt{5}u$. **(05)**

$\tan\theta = \frac{2u}{u} = 2 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}2$ **(05)** **[15]** **[10]**

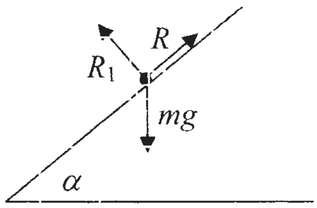
1 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

அநேகமான பரீட்சார்த்திகள் வேக முக்கோணியை சரியாக வரைந்திருக்கவில்லை. திசைகளையும் சரியாகக் காட்டியிருக்காமையினால் இறுதி விடைக்கு அண்மிக்க முடியாமையினால் வினாவின் இலகுத்தன்மை 30% வரையிலான கீழ் மட்டத்தில் காணப்பட்டது. இந்த பயிற்சியில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்கள் குறிக்கப்பட்ட குறிப்புகள் சரியாகக் கீறல் அவசியமாகும்.

வினா 2

2. அதியுயர் சரிவுக் கோடு கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்ந்துள்ள ஒரு சரிவு வழியே அதன் உச்சியில் ஓய்விலிருந்து திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை உச்சியிலிருந்து d தூரத்திற்குக் கீழ்நோக்கி இயங்குவதற்கு ஒரு செக்கன் எடுத்தால், துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு எதிரான தடை R மாறிலி எனக் கொண்டு, $R = m(g\sin\alpha - 2d)$ எனக் காட்டுக.
அத்துடன், உச்சியிலிருந்து சென்ற தூரம் d ஆக இருக்கும்போது துணிக்கையின் வேகத்தையும் காண்க.

துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு சாய்தளம் வழியே $F = ma$ யைப் பிரயோகிக்க.



$mg\sin\alpha - R = mf$, **(05)** இங்கு f துணிக்கையின் ஆர்முடுகல்

$f = g\sin\alpha - \frac{R}{m}$.

சாய்தளம் வழியே துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யைப் பிரயோகிக்க.

$d = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{R}{m}\right)1^2 \Rightarrow R = m(g\sin\alpha - 2d)$.

(05) **(05)** **[15]**

$\therefore f = g\sin\alpha - (g\sin\alpha - 2d) = 2d$ **(05)**

சாய்தளம் வழியே துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $v = u + at$ யைப் பிரயோகிக்க

$v = 2d.1 \Rightarrow v = 2d$ **(05)** **[10]**

2 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

வினா வினவப்பட்டுள்ள ஒழுங்கு முறையில் விடை எழுதி இருப்பின் விடைக்குரிய முழுப்புள்ளியையும் பெறுவதற்குரிய அதிக சந்தர்ப்பங்கள் இருந்தன. வினாப்பத்திரம் II இன் பகுதி A யின் இலகுத்தன்மை 50% இற்கு கிட்டிய இரு வினாக்களில் இதுவும் ஒரு வினாவாகும்.

வினா 3

3. ஓர் ஒப்பமான கிடைத் தளத்திற்கு மேலே உயரம் h இல் உள்ள திணிவு m ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான துணிக்கை ஈர்ப்பின் கீழ் ஓய்விலிருந்து விழுந்து, தளத்தில் அடித்து, பின்னர் பின்னதைக்கின்றது. மொத்தல் காரணமாக உண்டாகும் இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியின் இழப்பு $\dfrac{mgh}{4}$ எனின், துணிக்கைக்கும் தளத்திற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகத்தைக் காண்க.

துணிக்கை உயரம் $\dfrac{3h}{4}$ இற்குப் பின்னதைக்கின்றதெனக் காட்டுக.

தளத்தை மோதுவதற்கு சற்று முன் துணிக்கையின் வேகம் v என்க.

$v = \sqrt{2gh}$. **(05)**

தளத்தை மோதிய சற்றுப் பின் துணிக்கையின் வேகம் ev, **(05)** இங்கு தளத்திற்கும் e தளத்திற்கும் துணிக்கைக்கும் இடையிலான மீளமைவுக் குணகம்

மொத்தல் காரணமாக இழக்கப்பட்ட இயக்கப்பாட்டு சக்தி

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(ev)^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2(1-e^2) = \frac{mgh}{4}$$

$$= mgh(1-e^2) = \frac{mgh}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2} . \textbf{(05)} \qquad \textbf{[15]}$$

துணிக்கையின் மேல்நோக்கிய இயக்கத்திற்கு $v^2 = u^2 + 2as$ யைப் பிரயோகிக்க

$0 = (ev)^2 - 2gs$, **(05)** இங்கு மோதிய பின் துணிக்கை அடைந்த உயரம் s

$$s = \frac{(ev)^2}{2g} = \frac{\frac{3gh}{2}}{2g} = \frac{3}{4}h . \textbf{(05)} \qquad \textbf{[10]}$$

3 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

பெருமளவான மாணவர்கள் இயக்க சக்தி இழப்பை சரியாக கண்டு அதன் மூலம் துணிக்கை நிலத்தில் அடித்த உயரத்தை முதலில் பெற்றபின்னர் மீளமைவுக் குணகத்தைக் கண்டு இருந்தனர். நியூட்டனின் இயக்க விதிகளில் பயன்படுத்தப்படும் இயக்க சக்தி இழப்பு கணிப்பீடு தொடர்பாக சரியான விளக்கமின்றி விடை எழுதியிருந்தமையினால் விடை திருப்திகரமான மட்டத்தில் அமைந்து இருக்கவில்லை.

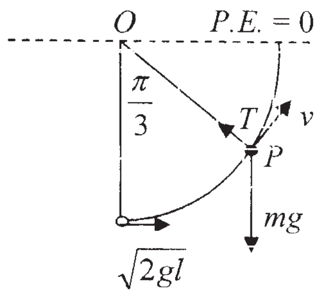
வினா 4

4. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே சுயாதீனமாகத் தொங்கும்போது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் OP யிற்குச் செங்குத்தாக வேகம் $\sqrt{2gl}$ துணிக்கைக்குக் கொடுக்கப்படுகின்றது. சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, OP ஆனது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் $\frac{\pi}{3}$ ஐ ஆக்கும்போது துணிக்கை P யின் வேகத்தைக் காண்க. இக்கணத்தில் இழையின் இழுவை $\frac{3}{2}mg$ எனக் காட்டுக.

சக்திக் காப்பு விதியினால்

$$\frac{1}{2}m(2gl) - mgl = \frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\frac{\pi}{3} \quad \textbf{(10)}$$

$$\therefore v = \sqrt{gl}\ . \ \textbf{(05)} \qquad \textbf{[15]}$$



துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $F = ma$ யைப் PO திசையில் உபயோகிக்க.

$$T - mg\cos\frac{\pi}{3} = \frac{mv^2}{l} = mg \quad \textbf{(05)}$$

$$T - \frac{1}{2}mg = mg \quad \because v = \sqrt{gl} \quad \textbf{(05)}$$

$$T = \frac{3}{2}mg$$

[10]

---

4 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

பரீட்சார்த்திகளில் அதிகமானோர் சரியாக விடை எழுதி இருந்தனர். இலகுத்தன்மை 65% மான உயர் மட்டத்தில் காணப்பட்டது. பத்திரம் II இனது பிரிவு A யில் இலகுத்தன்மை கூடிய வினா இதுவாகும்.

வினா 5

5. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$; இங்கு $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ஆகியன வழக்கமான கருத்தை உடையன. $\mathbf{b}$ ஆனது பருமன் $\sqrt{3}$ ஐ உடைய ஒரு காவியாகும். காவி $\mathbf{a}$ யிற்கும் காவி $\mathbf{b}$ யிற்குமிடையே உள்ள கோணம் $\frac{\pi}{3}$ எனின், $\mathbf{b}$ யை வடிவம் $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ யில் காண்க; இங்கு $x\,(<0)$, y ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகளாகும்.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\ ,\ |\mathbf{b}| = \sqrt{3} \quad \textbf{(05)}$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = (\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}).(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x + \sqrt{3}y = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\frac{\pi}{3} = 2.\sqrt{3}.\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}(1-y)$$

(05) **(05)**

$$x^2 + y^2 = 3(1-y)^2 + y^2 = 3 \Rightarrow 4y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ or } \frac{3}{2}.\ \textbf{(05)}$$

$y = 0$ ஆக $x = \sqrt{3}$.

$y = \frac{3}{2}$ ஆக $x = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

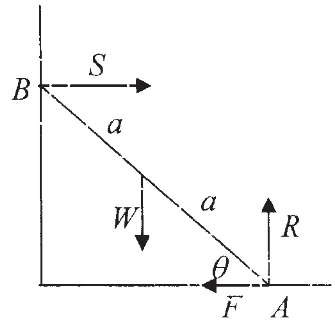
எனவே $\mathbf{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$. **(05)** **[25]**

5 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

குறியீடுகளில் காவியை குறித்துக் காட்டுதல் சரியாக அமையாமை அநேகமான விடைகளில் காணப்பட்ட குறைபாடாவதோடு இரண்டு காவிகளின் குற்றுப் பெருக்கத்தைப் பாவிக்கும் திறன் மிகவும் குறைந்த மட்டத்தில் காணப்பட்டது. இந்த வினாவிற்குரிய எண்சார்டந்த விடைகளைச் சுருக்குவதில் பின்னடைவைக் காணக்கூடியதாய் இருந்தது. இந்தக் காரணத்தினால் வினாவின் இலகுத்தன்மை 17% வரையிலான கீழ்மட்டத்தில் காணப்பட்டது.

வினா 6

6. *நிறை W வையும் நீளம் $2a$ யையும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB, அதன் முனை A ஒரு கரடான கிடைத் தரை மீதும் முனை B கோல் AB யைக் கொண்ட நிலைக்குத்துத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிரேயும் இருக்குமாறு, நாப்பத்திலே இருக்கின்றது. கோலிற்கும் தரைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\sqrt{\frac{3}{2}}$ எனின், கோல் நழுவுந் தறுவாயில் இருக்கும்போது கோலின் கிடையுடனான சாய்வைக் காண்க.*



கிடையாகத் துணிக்க $F = S$ **(05)**

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க. $R = W$ **(05)**

B பற்றிய திருப்புத் திறன்

$$Wa\cos\theta = S2a\sin\theta \Rightarrow S = \frac{1}{2}W\cot\theta \,. \quad \mathbf{(05)}$$

A

$$\frac{F}{R} = \frac{1}{2}\cot\theta \le \mu = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \tan\theta \ge \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \mathbf{(05)}$$

எனவே கிடையுடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ஆகும். **(05)** **[25]**

---

6 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

சரியான வரிப்படத்தை வரைந்து விளையுள் விசையின் திசையை சரியாகக் குறித்திராமையினால் விடை சரியாக இருந்தது மிகவும் குறைவாக காணப்பட்டது. கோல் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணமான θ ஐக் காட்டும் போது $\tan\theta$ இன் பெறுமானம் மட்டும் இருந்தமையினால் முழுப் புள்ளியையும் பெற முடியாது இருந்தது.

வினா 7

7. A, B, C ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் தம்முள் புறநீக்கும், யாவுமளாவிய (exhaustive) நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம்.

$P(A) = 2p,\ P(B) = p^2,\ P(C) = 4p - 1$ எனின், p யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$A \cup B \cup C = \Omega$ ஏனெனில் A, B, C யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள்

$P(A \cup B \cup C) = P(\Omega) = 1$ **(05)**

ஆனால் $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ ஏனெனில், A, B, C தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் **(05)**

$= 2p + p^2 + 4p - 1 = 1$ **(05)**

$i.e., p^2 + 6p - 2 = 0 \Rightarrow p = -3 \pm \sqrt{11}$ **(05)**

$p = -3 + \sqrt{11}$ ஏனெனில், p மறைப் பெறுமானம் கொண்டிருக்காது. **(05)** **[25]**

7 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

மாதிரி வெளியிற்குரிய சகல நிகழ்ச்சிகளும் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 1 எனக் கருதாமையினால் தம்முள் புறநீக்கும் மற்றும் யாதுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் எனும் சொற்களின் கருத்தை தெரியாமையினாலோ அல்லது அது தொடர்பாக கவனத்திற் கொள்ளாமையினால் அனேகமானவர்களுக்கு விடையைப் பெற முடியாது போனது.

வினா 8

8. A, B, C ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் மூன்று சாரா நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம். $A, (B \cup C)$ ஆகியன சாரா நிகழ்ச்சிகளெனக் காட்டுக.

$P\{A \cap (B \cup C)\} = P\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\}$ **(05)**

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\{(A \cap B) \cap (A \cap C)\}$ **(05)**

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C)$ A, B, C சாரா நிகிழ்ச்சிகள் ஆகையால் **(05)**

$= P(A)\{P(B) + P(C) - P(B)P(C)\}$

$= P(A)\{P(B) + P(C) - P(B \cap C)\}$ **(05)**

$= P(A)\{P(B \cup C)\}$ **(05)**

எனவே A யும் $B \cup C)$ யும் சாரா நிகழ்ச்சிகள் **[25]**

8 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

தொடைகள் சார்பாக நிகழ்தகவு தொடர்பான ஆரம்ப அறிவு மிகவும் குறைவு என்பதைக் காண முடிந்தது. சாராமை தொடர்பான அடிப்படைத் தேற்றத்தை நிறுவும் போது பெற்றுக் கொண்ட அறிவு வேறுசந்தர்ப்பங்களுக்கு பயன்படுத்திக் கொள்ள முடியாது இருந்தது. இதனால் வினாவின் இலகு மட்டம் 11% வரை மிகவும் குறைந்த மட்டத்தில் காணப்பட்டது.

வினா 9

9. 100 நோக்கல்களின் இடையும் நியம விலகலும் முறையே 30, 4.1 எனக் கணிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு நோக்கல் சரியான பெறுமானம் 30 இற்குப் பதிலாக 40 எனப் பிழையாகப் பதிவு செய்யப்பட்டிருப்பதாகப் பின்னர் காணப்பட்டுள்ளது. 100 நோக்கல்களின் சரியான இடையையும் நியம விலகலையும் கணிக்க.

சரியான கூட்டுத்தொகை $= 100\times 30 - 40 + 30 = 2990$. **(05)**

சரியான இடை $= \dfrac{2990}{100} = 29.9$. **(05)** **[10]**

சரியான வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 100(4.1^2 + 30^2) - 40^2 + 30^2$ **(05)**

$= 100(16.81 + 900) - 700$

$= 91681 - 700 = 90981$

சரியான மாறல் திறன் $= \dfrac{90981}{100} - 29.9^2 = 909.81 - 894.01 = 15.8$ **(05)**

சரியான நியம விலகல் $= \sqrt{15.8} = 3.975$ or 3.97 **(05)** **[15]**

---

9 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினாவிற்கு விடை எழுதிய மாணவர்கள் முதலாவது பகுதிக்கு திருப்தியாக விடை எழுதியிருப்பினும் இரண்டாவது பகுதியினைச் சுருக்குவதில் பின்னடைவைக் காண முடிந்தது. இதனால் எண் பரம்பலின் இடை மற்றும் நியம விலகளைக் கொண்ட எளிய கணித்தல்களைச் செய்வது தொடர்பான பின்னடைவைக் காண முடிந்தது.

வினா 10

10. A, B என்னும் பாடசாலைகளில் அவற்றின் மாணவர்களுக்கு வழங்கப்பட்ட ஒரு சோதனைக்கான இடைப் புள்ளிகள் முறையே 31, 45 ஆகும். பாடசாலை A யின் புள்ளிப் பரம்பலின் நியம விலகல் 5 ஆகும். பேறுகளை ஒப்பிடுவதற்குப் பாடசாலை B யின் இடையும் நியம விலகலும் பாடசாலை A யின் இடைக்கும் நியம விலகலிற்கும் சமமாகவும் பாடசாலை B யின் 85 புள்ளிகள் 63 புள்ளிகளாக அமையுமாறும் ஓர் ஏகபரிமாண உருமாற்றத்தின் மூலம் பாடசாலை B யின் புள்ளிகள் அளவிடைப்படுத்தப்படுகின்றன. ஏகபரிமாண நிலைமாற்றத்தைக் கண்டு, **இதிலிருந்து**, பாடசாலை B யின் புள்ளிப் பரம்பலின் தொடக்க நியம விலகலைக் காண்க.

$y = ax + b$ என்க. இங்கு x ஆரம்பப் புள்ளியாகவும் x மாற்றப்பட்ட புள்ளியாகவும் கொண்ட ஏகபரிமான உருமாற்றம்

$63 = 85a + b \rightarrow (1)$ **(05)**

$\bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow 31 = 45a + b \rightarrow (2)$ **(05)**

$(1) - (2) \Rightarrow 40a = 32 \Rightarrow a = 0.8$

(1) இலிருந்து $31 = 45\times 0.8 + b \Rightarrow b = -5$.

எனவே ஏகபரிமான உருமாற்றம் $y = 0.8x - 5$. **(05)** **[15]**

---

y இன் நியம விலகல் $= a \times x$ இன் நியம விலகல்

$\Rightarrow 5 = \dfrac{4}{5}\times x$ இன் நியம விலகல் $\Rightarrow x$ இன் நியம விலகல் $= 8$

(05) **(05)** **[10]**

---

10 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினாவிற்குரிய புள்ளி விபரங்கள் மற்றும் எளிய பரிமாற்றம் தொடர்பான அறிவு பொதுவாக இல்லாது இருந்தது. இதனால் இலகுத்தன்மை 6% இற்கு வரையறுக்கப்பட்டு இருந்தது.

வினா 11

இணைந்த கணிதம் II பகுதி B

11. (*a*) ஒரு துணிக்கை P ஆனது புள்ளி O இல் ஈர்ப்பின் கீழ் வேகம் u உடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. நேரம் $\frac{u}{2g}$ இற்குப் பின்னர் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது புள்ளி O இல் ஈர்ப்பின் கீழ் வேகம் $v\,(>u)$ உடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. A ஆனது துணிக்கை P அடையும் மிக உயர்ந்த புள்ளியெனக் கொள்வோம். P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் புள்ளி A யில் சந்திக்கின்றன. P, Q ஆகிய துணிக்கைகளின் முழு இயக்கங்களுக்கும் உரிய வேக - நேர வரைபுகளை **ஒரே வரிப்படத்தில்** வரைக.

இவ்வேக - நேர வரைபுகளைப் பயன்படுத்தி

(i) $OA = \frac{u^2}{2g}$ என,

(ii) $v = \frac{5u}{4}$ எனவும் புள்ளி A யில் துணிக்கை Q வின் வேகம் $\frac{3u}{4}$ என்வும்,

(iii) துணிக்கை Q அதன் அதியுயர் புள்ளியை அடையும்போது புள்ளி O விலிருந்து துணிக்கை P யின் உயரம் $\frac{7u^2}{32g}$ எனக்

காட்டுக.

(*b*) திணிவு M kg ஐ உடைய ஒரு கார் சமதள வீதி ஒன்றில் எல்லாக் கதிகளிலும் மாறிலியாக இருக்கும் இயக்கத்திற்கான தடை R இற்கு எதிரே செல்கின்றது. எஞ்சினின் உயர்ந்தபட்ச வலு H kW ஆகவும் ஒரு சமதள வீதியில் காரின் உயர்ந்தபட்சக் கதி $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ஆகவும் இருப்பின், தடை R ஐ M, H, v ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்ந்த ஒரு நேரிய வீதி வழியே

(i) கதி $\frac{v}{3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ உடன் நேரே மேல்நோக்கி,

(ii) கதி $\frac{v}{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ உடன் நேரே கீழ்நோக்கி

இயங்கும்போது காரின் ஆர்முடுகலை $M, H\, v, g, \alpha$ ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

சந்தர்ப்பம் (ii) இல் காரின் ஆர்முடுகல் சந்தர்ப்பம் (i) இல் காரின் ஆர்முடுகலின் இரு மடங்கெனின், $\sin\alpha$ வை M, H, v, g ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

இச்சந்தர்ப்பத்தில் வீதியிலே நேரே மேல்நோக்கிக் கார் செல்லும்போது அது அடையத்தக்க உயர்ந்த பட்சக் கதியை v யின் சார்பில் காண்க.

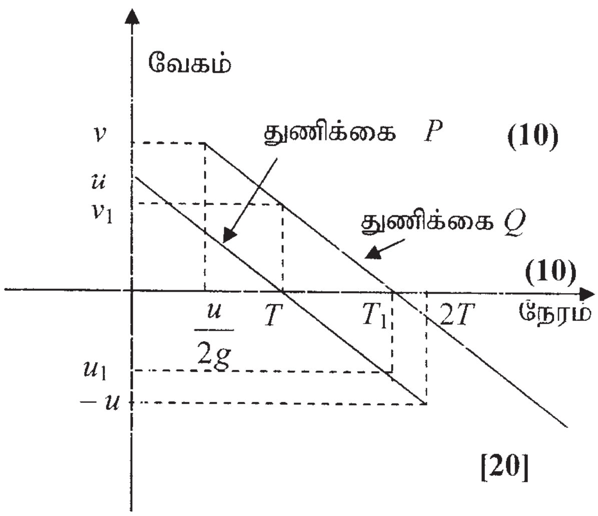
(*a*) (i) P எனும் துணிக்கை புள்ளி A யை அடைய எடுத்த நேரம் T என்க.

வரைபிலிருந்து $\quad T = \frac{u}{g}$ **(05)**

மேலும் வரைபிலிருந்து

$$OA = \frac{1}{2}uT = \frac{u^2}{2g}.$$

(05) **[10]**



(ii) புள்ளி A யில் துணிக்கை Q இனது v_1 வேகம் என்க.
Q இன் வரைபில் இருந்து

$$\frac{v - v_1}{T - \frac{u}{2g}} = g \Rightarrow v_1 = v - g\left(T - \frac{u}{2g}\right) = v - \frac{u}{2} \rightarrow (1)$$

(05) **(05)**

மேலும் வரைபில் இருந்து

$$\left(\frac{v + v_1}{2}\right)\left(T - \frac{u}{2g}\right) = \frac{u^2}{2g} \Rightarrow v + v_1 = 2u \rightarrow (2)$$

(05) **(05)**

(1), (2) இருந்து $v = \frac{5u}{4}$, $v_1 = \frac{3u}{4}$

(05) **(05)** **[30]**

(iii) துணிக்கை Q தனது அதி உயர் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம் T_1 எனவும் இந்நேரத்தில் துணிக்கை P இன் வேகம் U_1 எனவும் கொள்க.
Q இன் வரைபில் இருந்து

$$T_1 - \frac{u}{2g} = \frac{v}{g} \Rightarrow T_1 = \frac{5u}{4g} + \frac{u}{2g} = \frac{7u}{4g} \text{ and } \frac{u_1}{T_1 - T} = -g \Rightarrow u_1 = -\frac{3u}{4}.$$

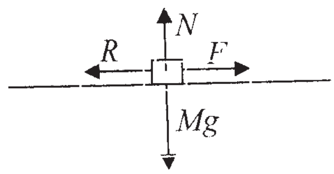
(05) **(05)**

துணிக்கை Q ஆனது அதியுயர் புள்ளியில் உள்ள போது புள்ளி O இலிருந்து P இன் உயரம் h என்க.
வரைபில் இருந்து

$$h = \frac{1}{2}\left(u + \frac{3u}{4}\right)(2T - T_1) = \left(\frac{7u}{8}\right)\left(\frac{2u}{g} - \frac{7u}{4g}\right) = \frac{7u^2}{32g}$$

(05) **(05)** **[20]**

(b) கதி உயர்வாக இருக்கையில் ஆர்முடுகல் பூச்சியமாகும்.
எனவே காரில் தாக்கும் விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.
எனவே $F - R = 0$. **(05)**

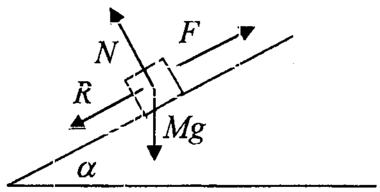


$$Fv = P \Rightarrow Fv = 10^3 H \Rightarrow F = \frac{10^3 H}{v}. \textbf{ (05)}$$

எனவே $R = \frac{10^3 H}{v}$. **(05)** **[15]**

(i) தெருவில் கார் நேரே மேல் நோக்கி இயங்கும் போது அதன் ஆர்முடுகல் a என்க.

$$F = \frac{10^3 H}{\frac{v}{3}} = \frac{3 \times 10^3 H}{v} \quad \textbf{(05)}$$



$$F - Mg\sin\alpha - R = Ma \quad \textbf{(05)}$$

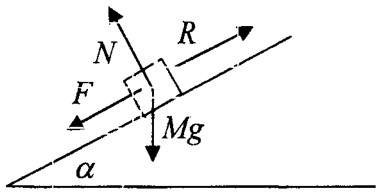
$$\frac{3 \times 10^3 H}{v} - Mg\sin\alpha - \frac{10^3 H}{v} = Ma$$

$$a = \frac{2 \times 10^3 H}{Mv} - g\sin\alpha \quad \textbf{(05)}$$

[15]

(ii) தெருவில் கார் நேரே கீழ் நோக்கி இயங்கும் போது அதன் ஆர்முடுகல் a' என்க.

$$F = \frac{10^3 H}{\frac{v}{2}} = \frac{2 \times 10^3 H}{v} \quad \textbf{(05)}$$



$$F + Mg\sin\alpha - R = Ma' \quad \textbf{(05)}$$

$$\frac{2 \times 10^3 H}{v} + Mg\sin\alpha - \frac{10^3 H}{v} = Ma'$$

$$a' = \frac{10^3 H}{Mv} + g\sin\alpha \quad \textbf{(05)}$$

[10]

$$a' = 2a \Rightarrow \frac{10^3 H}{Mv} + g\sin\alpha = 2\left(\frac{2 \times 10^3 H}{Mv} - g\sin\alpha\right) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{10^3 H}{Mgv}$$

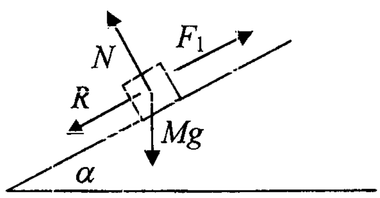
(05) **(05)**

[15]

தெருவில் கார் நேரே மேல் நோக்கி இயங்கும் போது அதன் உயர் வேகத்தை v_1 என்க.

$$F_1 = \frac{10^3 H}{v_1} \quad \textbf{(05)}$$

உயர் வேகத்தின் போது ஆர்முடுகல் பூச்சியமாகும். எனவே காரின் தாக்கும் விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்



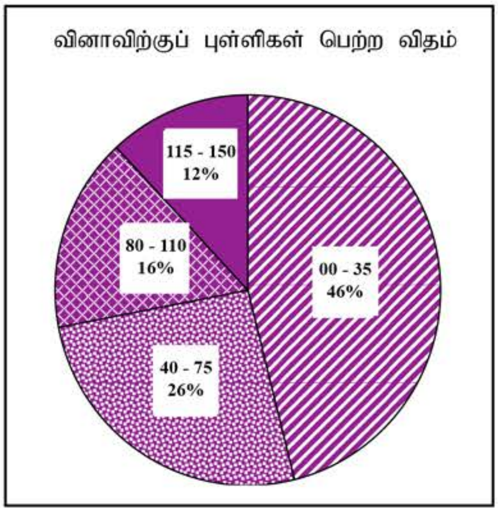
$$F_1 - Mg\sin\alpha - R = 0 \quad \textbf{(05)}$$

$$\frac{10^3 H}{v_1} - Mg\left(\frac{10^3 H}{Mgv}\right) - \frac{10^3 H}{v} = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{v}{2} \quad \textbf{(05)}$$

[15]

---

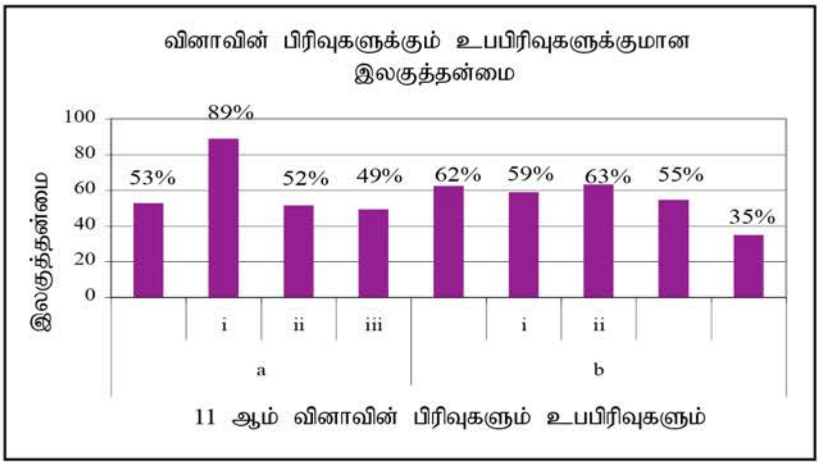
11 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 93% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 46%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 26%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 16%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 12%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இதில் 9 உபபகுதிகள் உள்ளதோடு (b) யின் கடைசி உபபிரிவைத் தவிர மற்றைய சகல பகுதிகளுக்கான இலகுத்தன்மை 49%ஐ விட குறையவில்லை. அந்தப் பகுதிக்கான இலகுத்தன்மை 35% ஆகும். (a) யினது முதலாவது உபபிரிவின் இலகுத்தன்மை உயர்வாக இருந்ததுடன் அது 89% ஆகும்.

11 மாணவர்களில் அதிகளவிலானோர் அதாவது 92.5% மானோர் தெரிவு செய்திருந்த வினா இதுவாகும். எனினும் அந்த விடைகளில் 46% மானோர் பெற்றது வினாவிற்குரிய புள்ளிகளில் 25% அல்லது அதிலும் குறைவாகும்.

(a) துணிக்கைகள் இரண்டினதும் முழுமையான இயக்கத்தை குறிப்பிடும் வரைபை கீறுவதற்காக மாணவர்கள் பெற்றிருந்த புள்ளிகள் அதற்குரிய மொத்தப் புள்ளிகளில் 53% மட்டுமேயாகும். அதில் (i) ஆம் பகுதிக்கு உரிய புள்ளிகளில் 89% த்தினைப் பெற்றுக்கொள்வதில் அவர்கள் வெற்றியடைந்திருந்தனர். (ii) ஆம் பகுதிக்கான வெளிப்பாடு அவ்வளவு திருப்தியாக இல்லாததோடு நிறுவ வேண்டிய பெறுபேறுகளில் ஒன்றைப் பாவித்து மற்றைய பெறுபேறைப் பெற்றுக்கொள்வதிலும் சில விடைகளுள் காணப்பட்ட குறைபாடுகளாகும். பகுதி (iii) இன் விடைகளைப் பெற்றுக்கொள்வதில் மிகவும் பின்னடைவு காணப்பட்டது.

(b) இங்கு (i), (ii) ஆகிய உப பிரிவுகளுக்கு போதியளவு திருப்திகரமாக விடை எழுதி இருப்பினும் இறுதி பகுதிக்காக அளித்திருந்த விடை பெருமளவு திருப்திகரமாக இல்லை. அலகுகளைச் சரியாகப் பாவித்தல் மற்றும் மாற்றியமைத்தல் அதாவது கிலோவோல்ட்(kW), வோல்ட் (W) என மாற்றுவதில் பின்னடைவு இருந்தமையினால் புள்ளிகள் கிடைக்காது போனமை குறிப்பிடத்தக்கது.

பகுதி (a) யிற்காக தரப்பட்டுள்ள தகவல்களைக் கொண்டு வேக நேர வரைபை சரியாகக் கீறி அதன் புள்ளிகள் தொடர்பான விளக்கத்தை கூடியளவு முன்னேற்றுவதோடு பகுதி (b) யிற்காக தரப்பட்டுள்ள அல்லது உருவாக்கப்பட்ட வரைபைக் கொண்டு சரியான அலகுகளுக்கு மாற்றிக் கொள்வதில் இயக்கத்திற்குரிய தொடர்பைக் கட்டியெழுப்புவதற்காக கூடியளவு விளக்கத்தைப் பெறும் வகையில் பொருத்தமான பயிற்சிகளை மாணவர்களுக்கு எப்போதும் செய்வது அவசியமாகும்.

வினா 12

12. (a) ஒரு புள்ளி O விலிருந்து உயரம் k யில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி C யில் கிடையுடன் கோணம் θ இல் சாய்ந்து வேகம் u உடன் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒரு துணிக்கை ஈர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. புள்ளி O வினூடாக எறியத் தளத்தில் உள்ள கிடைக் கோடு, நிலைக்குத்துக் கோடு ஆகியன முறையே Ox, Oy அச்சுகளெனக் கொண்டு செங்கோணத் தெக்காட்டு ஆள்கூற்றுத் தொகுதி ஒன்றைக் கருதுவோம்.

நேரம் t யில் துணிக்கை புள்ளி (x, y) இல் இருக்குமெனின், $y = k + x\tan\theta - \dfrac{gx^2\sec^2\theta}{2u^2}$ எனக் காட்டுக.

h நேராக இருக்கும் புள்ளி $A(0, h)$ இல் கிடையுடன் கோணம் α இல் சாய்வாக வேகம் v உடன் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒரு துணிக்கை P ஆனது ஈர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. அதே கணத்தில் புள்ளி $B\left(0, \dfrac{h}{2}\right)$ இல் கிடையுடன் கோணம் $\beta\ (> \alpha)$ இல் சாய்வாக வேகம் w உடன் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது ஈர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளும் கிடைத் தூரம் d ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமெனின், $v\cos\alpha = w\cos\beta$ எனவும் $h = 2d(\tan\beta - \tan\alpha)$ எனவும் காட்டுக.

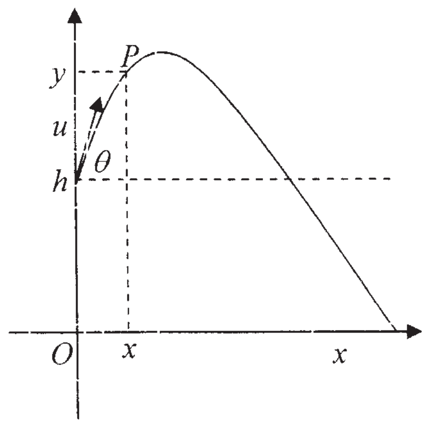
அத்துடன் இரு துணிக்கைகளும் சந்திப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\dfrac{h}{2(w\sin\beta - v\sin\alpha)}$ எனவும் காட்டுக.

(b) ஒரு கிடை நிலத்திலிருந்து 3 மீற்றர் உயரத்தில் இருக்கும் ஒரு சீலிங்குடன் ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையின் ஒரு நுனி இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் இயங்கத்தக்க, இலேசான, ஒப்பமான கப்பி P யின் கீழும் சீலிங்குடன் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் இலேசான ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகவும் அனுப்பப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனியுடன் திணிவு $M(> m)$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இயங்கத்தக்க கப்பி P யும் துணிக்கை Q வும் நிலத்திலிருந்து முறையே $\dfrac{1}{2}$ மீற்றர், 1 மீற்றர் உயரங்களிலும் கப்பிகளுடன் தொடுகையுறாத இழைப் பகுதிகள் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கும்போது தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை Q வின் ஆர்முடுகலையும் இழையின் இழுவையையும் காண்க.

துணிக்கை Q நேரம் $\sqrt{\dfrac{4M+m}{(2M-m)g}}$ செக்கனிற்குப் பின்னர் நிலத்தை அடையும் எனவும் கப்பி P நிலத்திலிருந்து உயரம் $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3M}{4M+m}$ மீற்றருக்கு ஏறும் எனவும் காட்டுக.

(a) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐ நிலைக்குத்தாகப் பாவிக்க.

$$y - k = u\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow (1) \quad \textbf{(10)}$$



$s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐ கிடையாகப் பாவிக்க.

$$x = ut\cos\theta \Rightarrow t = \frac{x}{u\cos\theta} \quad \textbf{(05)}$$

(1) இலிருந்து

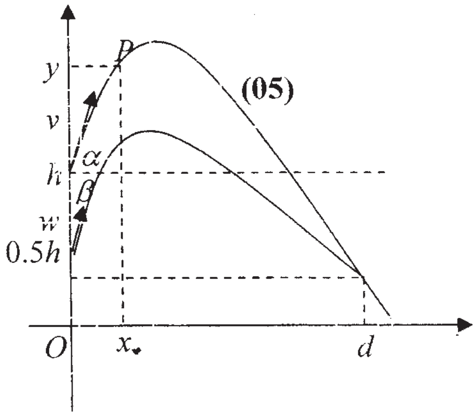
$$y - k = x\tan\theta - \frac{gx^2\sec^2\theta}{2u^2} \quad \textbf{(05)}$$

$$y = k + x\tan\theta - \frac{gx^2\sec^2\theta}{2u^2}$$

[20]

கிடையாக $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யை துணிக்கை P இற்கு பாவிக்க.

$d = vt_0 \cos\alpha \rightarrow (2)$, **(05)** இங்கு t_0 துணிக்கைகள் சந்திக்க எடுக்கும் நேரம்



கிடையாக $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யை துணிக்கை Q இற்கு பாவிக்க.

$d = wt_0 \cos\beta \rightarrow (3)$. **(05)**

(2) ,(3) இருந்து

$v\cos\alpha = w\cos\beta$ **(05)** **[20]**

முதல் பகுதியில் துணிக்கை P இன் இயக்கத்திற்கு பெறப்பட்ட முடிவை உபயோகிக்க

$$y_0 = h + d\tan\alpha - \frac{gd^2\sec^2\alpha}{2v^2} \rightarrow (4)$$, **(05)** இங்கு y_0 துணிக்கைகள் சந்திக்கும். புள்ளியின் உயரமாகும்.

முதல பகுதயில துணககை Q இன இயக்கத்திற்கு பெறப்பட்ட முடிவை உபயோகிக்க

$$y_0 = \frac{h}{2} + d\tan\beta - \frac{gd^2\sec^2\beta}{2w^2} \rightarrow (5) \; \textbf{(05)}$$

(4) ,(5) இலிருந்து $h + d\tan\alpha = \frac{h}{2} + d\tan\beta \Rightarrow h = 2d(\tan\beta - \tan\alpha)$

(05) **[15]**

$$d = \frac{h}{2(\tan\beta - \tan\alpha)} = \frac{h\cos\alpha\cos\beta}{2(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta)} = wt_0\cos\beta \; \textbf{(05)}$$

$$i.e., t_0 = \frac{h}{2w\left(\sin\beta - \sin\alpha\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)\right)} = \frac{h}{2w\left(\sin\beta - \sin\alpha\left(\frac{v}{w}\right)\right)} = \frac{h}{2(w\sin\beta - v\sin\alpha)}$$

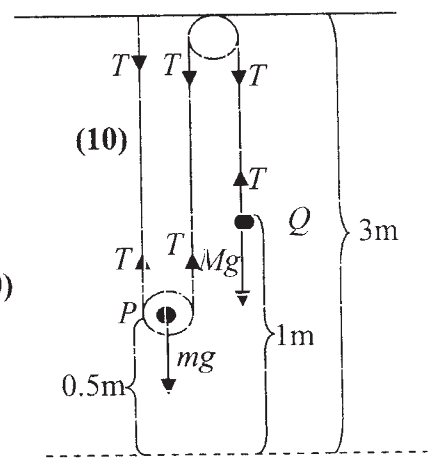
(05) **(05)** **[15]**

(b) துணிக்கை Q இன் ஆர்முடுகலை a என்க.

துணிக்கை Q இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாக கீழ்நோக்கி $F = ma$ யைப் பிரயோகிக்க.

$Mg - T = Ma \rightarrow (1)$ **(05)**

கப்பி P இற்கு $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ யைப் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி பிரயோகிக்க $2T - mg = m\frac{a}{2} \rightarrow (2)$ **(10)**



$(1) \times 2 + (1)$ இன் மூலம் $2Mg - mg = \left(2M + \frac{m}{2}\right)a$

$$a = 2\left(\frac{2M - m}{4M + m}\right)g \qquad \textbf{(05)}$$

[30]

---

(1) இலிருந்து $T = Mg - Ma = Mg\left\{1 - 2\left(\frac{2M - m}{4M + m}\right)\right\} = \frac{3mMg}{4M + m}$

(05) **(05)** **[10]**

துணிக்கை Q இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ யைப் பிரயோகிக்க.

$1 = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{2(2M - m)}{4M + m}\right)gt_0^2$ **(10)** இங்கு t_0 நிலைத்தை அடைய எடுக்கும் நேரம்

$t_0 = \sqrt{\frac{4M + m}{(2M - m)g}}$ நிமிடங்கள்

[10]

---

t_0 எனும் நேரத்தில் கப்பி P உயரும் உயரத்தை h_0 என்க.

மேல்நோக்கி துணிக்கை P இன் இயக்கத்திற்கு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பாவிக்க.

$h_0 = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{2M - m}{4M + m}\right)\left(\frac{4M + m}{2M - m}\right) = \frac{1}{2}$ meters. **(05)**

t_0 நேரத்தில் கப்பி P வேகம் v என்க.

கப்பி P இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி $v = u + at$ யைப் பிரயோகிக்க.

$$v = 0 + \left(\frac{2M - m}{4M + m}\right)g\sqrt{\frac{4M + m}{2(M - m)g}} = \sqrt{\left(\frac{2M - m}{4M + m}\right)g}$$

(05) **(05)**

Q நிலத்தை அடைந்த பின்னர் கப்பி P உயரும் உயரத்தை h_1 என்க.

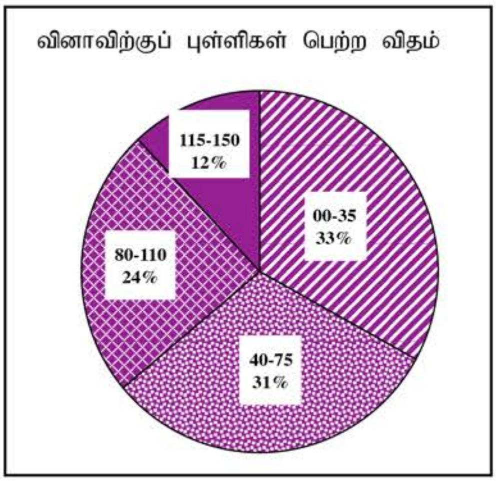
Q நிலத்தை அடைந்த பின்னர் கப்பி P இன் இயக்கத்திற்கு நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி $v^2 = u^2 + 2as$ யைப் பிரயோகிக்க.

(05) $0 = \left(\frac{2M - m}{4M + m}\right)g - 2gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2M - m}{4M + m}\right)$ **(05)**

மொத்த உயரம் $= \frac{1}{2} + h_0 + h_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2M - m}{4M + m}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3M}{4M + m}$ மீற்றர் **(05)** **[30]**

---

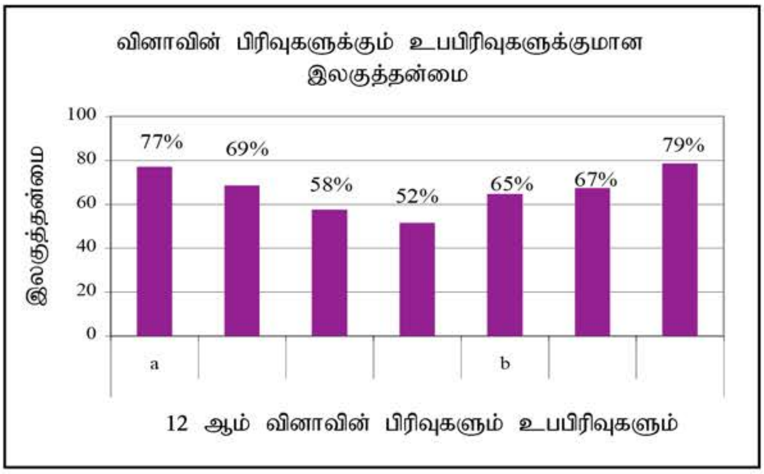
12 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 84.9% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 33%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 31%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 24%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 12%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கு 7 உபபகுதிகள் உள்ளதோடு அந்த சகல உப பகுதிகளினதும் இலகுத்தன்மை 50% த்தினை விடக் கூடி இருந்தது. அவற்றுள் கூடிய இலகுத்தன்மை (b) யின் இறுதி உபபகுதியாவதோடு அது 79% ஆகும். மிகவும் குறைந்த இலகுத்தன்மை காணப்படுவது (a) யின் இறுதிப் பகுதியாவதுடன் அது 52% ஆகும்.

12 ஓரளவு திருப்திகரமான முறையில் விடை எழுதப்பட்டுள்ள வினாவாகும்.

(a) முதலாம் பகுதிக்கு திருப்திகரமாக விடை எழுதியுள்ள அனேகமானோருக்கு வரிப்படத்தை சரியாகக் கீறுவதற்கு முடியாது இருந்தமையினால் எஞ்சிய இரு பகுதிகளுக்கும் சரியான விடையைப் பெறுவதற்கு முடியாது இருந்துள்ளது. வினாவை நன்கு வாசித்து விளங்கிக் கொள்ள வேண்டியமை கருத்திற் கொள்ளப்பட வேண்டியது அவசியமாகும்.

(b) சக்தியை குறிப்பிடுவது மற்றும் ஆர்முடுகலை குறிப்பிடுவது ஒப்பமான கப்பியில் இயக்கத்தன்மை ஆகிய வினாவின் இறுதிப் பகுதிக்கு அளிக்கப்பட வேண்டிய விடையை ஒழுங்கமைக்கக் கூடிய முறை தொடர்பான விளக்கம் பின்தங்கிய மட்டத்தில் இருத்தல் விடை பிழைப்பதற்கு காரணமாக இருப்பது தெளிவாகிறது.

வினாவை சரியாக வாசித்து விளங்கிக் கொண்டு அதற்கேற்ப சரியான வரிப்படத்தை வரைந்து தகவல்களை அந்தப் படங்களில் குறித்துக் காட்டல், அதன் மூலம் தொடர்புகள் சமன்பாடுகளைக் கட்டியெழுப்பி தேவையான பெறுபேறுகளை தருவிப்பதற்காக எளிய சமன்பாடுகள் மூலம் பரீட்சயத்தை எடுக்க முடியும்.

வினா 13

13. A, B என்பன ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது இடைத் தூரம் $8l$ இல் இருக்கும் இரு புள்ளிகளாகும். திணிவு m ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான துணிக்கை P ஆனது A யிற்கும் B யிற்குமிடையே AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இயற்கை நீளம் $3l$ ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு 4λ வையும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் புள்ளி A உடனும் இயற்கை நீளம் $2l$ ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு λ வையும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் புள்ளி B உடனும் துணிக்கை P இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது ஒரு புள்ளி C யிலே நாப்பத்தில் இருக்குமெனின், $AC=\frac{42}{11}l$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கை P ஆனது AB யின் நடுப் புள்ளி M இல் வைக்கப்பட்டு, பின்னர் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை P ஆனது AB வழியே புள்ளி A யிலிருந்து தூரம் x இல் இருக்கும்போது இரு இழைகளினதும் இழுவைகளைப் பெறுக.

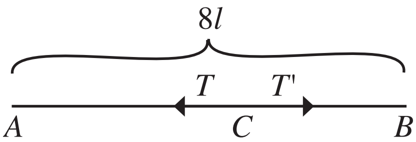
$\frac{40}{11}l \le x \le 4l$ இற்குத் துணிக்கை P யின் இயக்கச் சமன்பாட்டை எழுதி, வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $\ddot{x}+\frac{11\lambda}{6ml}\left(x-\frac{42}{11}l\right)=0$ எனக் காட்டுக.

$y=x-\frac{42}{11}l$ என எழுதுவதன் மூலம் $\ddot{y}+\frac{11\lambda}{6ml}y=0$ எனக் காட்டுக.

மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வடிவம் $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ யை உடையதெனக் கொண்டு A, B, ω ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது புள்ளி A யிலிருந்து தூரம் $\frac{41}{11}l$ இல் இருக்கும்போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

துணிக்கை P, C இல் இருக்கும் போது AP இழையில் இழுவை T என்க.
துணிக்கை P, C இல் இருக்கும் போது PB இழையில் இழுவை $T\,'$ என்க.



(05)

$$T=\left(\frac{AC-3l}{3l}\right)4\lambda \quad , \quad T'=\left(\frac{8l-AC-2l}{2l}\right)\lambda=\left(\frac{6l-AC}{2l}\right)\lambda .$$

(10) **(10)**

துணிக்கை P ஆனது புள்ளி C இல் நாப்பத்தில் இருக்குமெனின்,

$$T=T' \Rightarrow \left(\frac{AC-3l}{3l}\right)4\lambda=\left(\frac{6l-AC}{2l}\right)\lambda \Rightarrow 11AC=42l \Rightarrow AC=\frac{42}{11}l .$$

(05) **(05)** **(05)** **[40]**

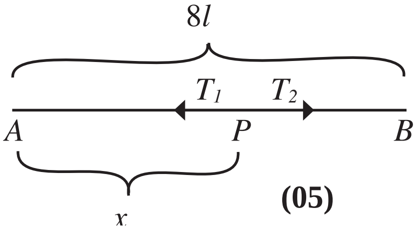
துணிக்கை P ஆனது A எனும் புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் உள்ள போது AP இல் உள்ள இழுவையை T_1 என்க.

துணிக்கை P ஆனது A எனும் புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் உள்ள போது BP இல் உள்ள இழுவையை T_2 என்க.

ஊக்கின் விதியினால்

$$T_1=\left(\frac{x-3l}{3l}\right)4\lambda \quad \textbf{(05)}$$

$$T_2=\left(\frac{8l-x-2l}{2l}\right)\lambda=\left(\frac{6l-x}{2l}\right)\lambda \quad \textbf{(05)}$$



(05)

துணிக்கை P இற்கு AB வழியே நியூட்டனின் விதியை பிரயோகிக்க.

$$T_2-T_1=m\ddot{x} \quad \textbf{(10)}$$

$$i.e., \left(\frac{6l-x}{2l}\right)\lambda - \left(\frac{x-3l}{3l}\right)4\lambda = m\ddot{x} \ \textbf{(05)}$$

$$i.e., m\ddot{x} + \frac{\lambda}{l}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)x - 7\lambda = 0 \ \textbf{(05)}$$

$$i.e., \ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml}x - \frac{7\lambda}{m} = 0$$

$$i.e., \ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml}\left(x - \frac{42}{11}l\right) = 0 \ \textbf{(05)}$$

[40]

$y = x - \frac{42}{11}l$ எனக.

$\dot{y} = \dot{x}$, $\ddot{y} = \ddot{x}$ **(05)**

$\ddot{y} + \frac{11\lambda}{6ml}y = 0 \rightarrow (1)$ **(05)**

[10]

$y = A\cos\varpi t + B\sin\varpi t \rightarrow (2)$.

$\dot{y} = -A\varpi\sin\varpi t + B\varpi\cos\varpi t \rightarrow (3)$.

$x = 4l$, $\dot{x} = 0$ at $t = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{11}l$, $\dot{y} = 0$ $t = 0$ இல் **(05)**

எனவே $(2) \Rightarrow A = \frac{2}{11}l$, $(3) \Rightarrow B = 0$.

(05) **(05)**

$\therefore y = \frac{2}{11}l\cos\varpi t \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{2}{11}l\varpi^2\cos\varpi t = -\varpi^2 y$.

(1)உடன் ஒப்பிட $\varpi^2 = \frac{11\lambda}{6ml} \Rightarrow \varpi = \sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}$. **(05)**

[20]

$y = \frac{2}{11}l\cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t$, $-\frac{2}{11}l \le y \le \frac{2}{11}l$ இல் **(05)**

$x = \frac{42}{11}l + \frac{2}{11}l\cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t$, $\frac{40}{11}l \le x \le 4l$ இல் **(05)**

துணிக்கை P ஆனது $x = \frac{41}{11}l$ எனும் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம் t_0 என்க.

$$\frac{2}{11}\cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0 = \frac{41}{11} - \frac{42}{11} \Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0 = -\frac{1}{2}.$$

(05) **(05)**

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}t_0 = \frac{2\pi}{3} \quad \textbf{(05)}$$

$$\dot{x} = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t \quad \textbf{(05)}$$

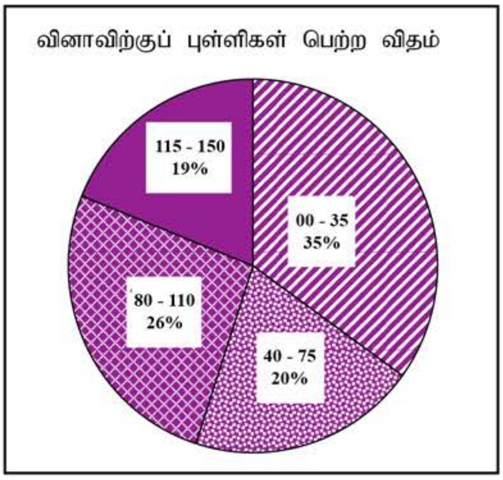
இப்புள்ளியில் துணிக்கை P இன் வேகம்

$$\dot{x} = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0 = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\lambda l}{22m}}$$

(05) **(05)** **[40]**

---

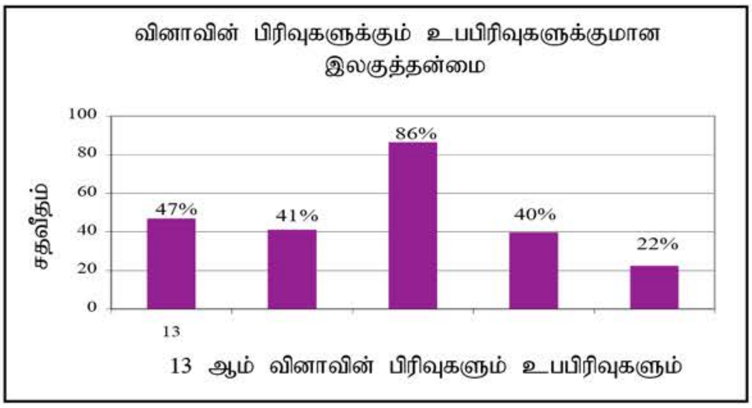
13 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 57.1% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 35%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 20%
80- 110 புள்ளி ஆயிடையில் 26%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 19%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கே 5 உபபிரிவுகள் தரப்பட்டுள்ளதோடு இறுதி உபபிரிவைத் தவிர மற்றைய சகல பகுதிகளினதும் இலகுத்தன்மை 40% அல்லது அதற்கும் அதிகமாக இருந்தது. அந்த உபபகுதிக்கான இலகுத்தன்மை 22% ஆகும். மூன்றாவது உபபிரிவுக்கு அதிக இலகுத்தன்மை இருப்பதோடு அது 86% ஆகும்.

13 எளிமை இசை இயக்கம் தொடர்பான விளக்கம் உள்ள மாணவர்கள் முதலாம் பகுதிக்கு திருப்திகரமாக விடை எழுதி இருந்தனர். வினாவின் இறுதிப் பகுதிகளுக்கு விடையளித்தலில் பின்தங்கிய மட்டம் காணப்பட்டது. தரப்பட்ட சமன்பாட்டினது தீர்வை கருதி ω இற்கான பெறுமானத்தைப் பெற்றமையினால் புள்ளிகள் குறைவடைவதற்கு காரணமாக அமைந்தது. இறுதிப் பகுதிக்கு விடை எழுதியமை மிகவும் பின்னடைந்திருந்ததை அவதானிக்க முடிந்தது.

வினாவை வாசித்து நல்ல முறையில் விளங்கிக் கொள்ளாமையினால் ஆரம்ப அறிவு குறைவடைதல் மற்றும் இயந்திர முறைக்கும் பழக்கப்பட்டமை பின்னடைவான விடையை முன்வைத்தமை காரணமாவதுடன் ஒரே வினாவாயினும் பல்வேறு முறையில் விடைகளைப் பெற்றுக் கொள்ளும் திறனை அவதானிப்பதற்கு மாணவர்களைப் பழக்கப்படுத்த வேண்டும்.

வினா 14

14. (*a*) A, B ஆகியன ஒரு புள்ளி O உடன் ஒரேகோட்டிலில்லாத இரு வேறுவேறான புள்ளிகளெனக் கொள்வோம். புள்ளி O குறித்து A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகும். D ஆனது AB மீது $BD = 2DA$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள புள்ளியெனின், புள்ளி O குறித்துப் புள்ளி D யின் தானக் காவி $\frac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$ எனக் காட்டுக.

$\overrightarrow{BC} = k\mathbf{a}, (k > 1)$ ஆகவும் O, D, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரேகோட்டிலும் இருப்பின், k யின் பெறுமானத்தையும் விகிதம் $OD : DC$ யையும் காண்க.

$\overrightarrow{AC}$ ஐ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

அத்துடன் AC யிற்குச் சமாந்தரமாகப் புள்ளி O வினூடாகச் செல்லும் கோடு E யில் AB யைச் சந்திக்குமெனின், $6DE = AB$ எனக் காட்டுக.

(*b*) Ox, Oy என்னும் செங்கோணத் தெக்காட்டின் அச்சுகள் குறித்து A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(\sqrt{3}, 0), (0,-1), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ ஆகும். $6P, 4P, 2P, 2\sqrt{3}P$ நியூற்றன் என்னும் பருமன்களை உடைய விசைகள் முறையே OA, BC, CA, BO ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துகளின் ஒழுங்குமுறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

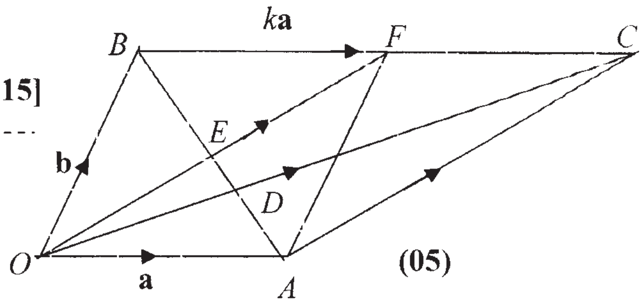
விளையுளின் தாக்கக் கோடு y - அச்சை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

இதிலிருந்து, விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

AB வழியே எழுத்துகளின் ஒழுங்குமுறையினால் காட்டப்படும் திசையில் $6\sqrt{3}\ P$ நியூற்றன் பருமனுள்ள வேறொரு விசை தொகுதிக்குப் புகுத்தப்பட்டுள்ளது. தொகுதி $10\,P$ நியூற்றன் மீற்றர் பருமனுள்ள ஓர் இணையாக ஒடுக்கப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

(*a*) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \frac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \frac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$

(05) **(05)** **[15]**



(05)

$\overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + k\mathbf{a}$ **(05)**

O, D, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் இருப்பதனால்

$\overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{OC}$, இங்கு λ ஒரு பரிமானம்

$i.e., \frac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{b}+k\mathbf{a})$ **(05)**

$(3\lambda k - 2)\mathbf{a} + (3\lambda - 1)\mathbf{b} = \mathbf{0}$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ இரு சமாந்தரமற்ற காவிகள் ஆகையால்

$3\lambda k - 2 = 0, 3\lambda - 1 = 0$ **(05)** $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ **(05)**, $k = 2$. **(05)** **[20]**

$\overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{OC} \Rightarrow OD = \frac{1}{3}OC \Rightarrow OD = \frac{1}{3}(OD + DC) \Rightarrow 2OD = DC \Rightarrow OD : DC = 1:2$

(05) **(05)** **(05)** **[20]**

$\therefore\ \overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + 2\mathbf{a}$

$\therefore\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\mathbf{a} + (\mathbf{b} + 2\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ **(05)**

OE எனும் கோட்டினை நீட்ட அது யை இல் சந்திக்கின்றது.

$OACF$ ஓர் இணைகரம் ஏனெனில் OE சமாந்தரம் AC

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ **(05)**

எனவே $OAFB$ ஓர் இணைகரம்

ஆகவே, AB இன் நடுப்புள்ளி E ஆகும். **(05)**

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \frac{1}{6}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ **(05)**

$6\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 6DE = AB$ **[20]**

(b) Ox திசையில் விசைகளைத் துணிக்க.

$X = 6P + 4P\cos\frac{\pi}{3} + 2P\cos\frac{\pi}{3} = 9P$ **(10)**

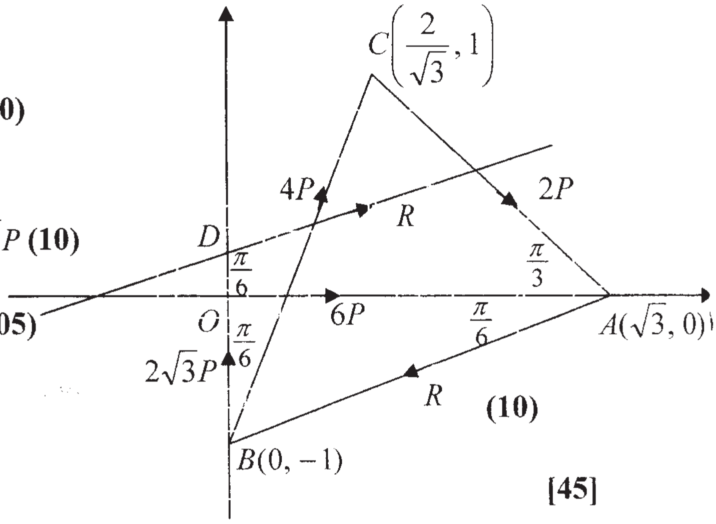
Oy திசையில் விசைகளைத் துணிக்க.

$Y = 2\sqrt{3}P + 4P\sin\frac{\pi}{3} - 2P\sin\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}P$ **(10)**

$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{81+27}P = 6\sqrt{3}P$ **(05)**

$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{3\sqrt{3}P}{9P} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(05)**

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ **(05)**



[45]

$OD = d$ ஆகுமாறு உள்ள புள்ளி D
இதனூடாக விளையுள் விசை
தாக்குவதாகக் கருதுக.
இடஞ்சுழியாக D பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$4P\cos\frac{\pi}{3} \times (d+1) + 6P \times d + 2P\cos\frac{\pi}{3} \times d - 2P\sin\frac{\pi}{3} \times \sqrt{3} = 0$ **(10)**

$2 \times (d+1) + 6 \times d + 1 \times d - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{9}$ **(05)** **[15]**

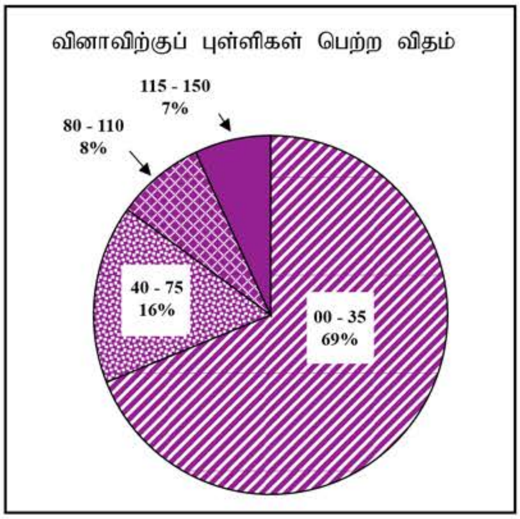
O இனூடாக செல்லும் தெக்காட்டு ஆள்கூற்று அச்சுக்கள் குறித்து, விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோட்டில் உள்ள மாறும் புள்ளி (x, y) என்க.

$\frac{y-d}{x} = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow y - \frac{1}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow 9y - 3\sqrt{3}x - 1 = 0$ **(05)** **[05]**

O இனூடாக செல்லும் தெக்காட்டடு ஆள்கூற்று அச்சுக்கள் குறித்து, விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோட்டில் உள்ள மாறும் புள்ளி (x, y) என்க.

(05) $6\sqrt{3}P \times \left(1 + \frac{1}{9}\right)\sin\frac{\pi}{3} = 10P$ newton metre **(05)** **[10]**

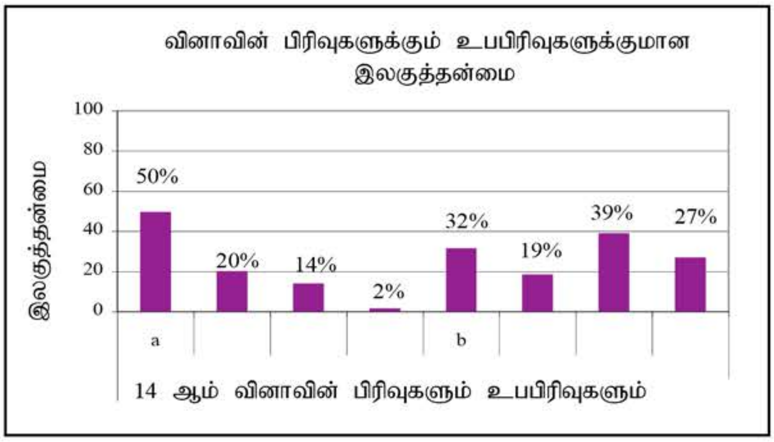
14 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 46.2% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 69%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 16%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 8%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 7%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கு 8 உபபகுதிகள் உள்ளதோடு அவற்றின் இலகுத்தன்மை 25% இனை விடக் கூட இருந்தமை நான்கு உபபகுதிகளுக்காகும். கூடிய இலகுத்தன்மை (a) யின் முதலாவது உபபகுதிக்காகும். அது 50% ஆகும். அவ்வாறு (a) யின் நான்காவது பகுதியின் இலகுத்தன்மை 2% மாக இருந்தது.

இது குறைவானோர் தெரிவு செய்த வினாவாகும்.

(a) காவிப் பெறுமானங்களைப் பயன்படுத்தும் போது காவிப் பெறுமானங்களை குறிப்பது தொடர்பாக உள்ள கவனம் மிகவும் குறைவானது. முதலாவது பகுதிக்கு திருப்திகரமாக விடை எழுதி இருப்பினும் மற்றைய பகுதிகளுக்கு விடை எழுதும் போது காவிகள் தொடர்பான அறிவு மற்றும் பயன்படுத்தும் திறமை மிகவும் குறைவாகக் காணப்பட்டது. கலைத்திட்டத்திற்கு உரியதல்லாதவாறு அமைந்துள்ள காவிகள் தொடர்பாக விகித தேற்றத்தை பயன்படுத்தியமையில் வினாவின் முதலாவது பகுதிக்கு புள்ளிகள் குறைவடைந்ததைக் காணமுடிந்தது.

ஒரு நேர்கோடு அல்லது ஒன்றிற்கொன்று சமாந்தரமான காவிகள் இரண்டை $\mathbf{a}, k\mathbf{a}$ என்ற வடிவில் எழுதுவதுடன் (இங்கு k என்பது பரமானம்) பொருத்தமான சந்தர்ப்பங்களில் காவிக் கூட்டல் தொடர்பான முக்கோண விதியை பயன்படுத்திய மாணவர்கள் அவதானத்தைப் பயன்படுத்தியிருப்பின் விடை எழுதுவது மிகவும் இலகுவாக இருந்திருக்க முடியும்.

(b) தரப்பட்ட பொருத்தமான முறையில் வினாவாக இருப்பினும் வினா நினைவில் விளங்கிக்கொண்டிராமையினால் திருப்திகரமான மட்டத்திற்கு புள்ளிகளைப் பெறுவதற்கு முடியாமையினைக் காணக் கூடியதாய் இருந்தது.

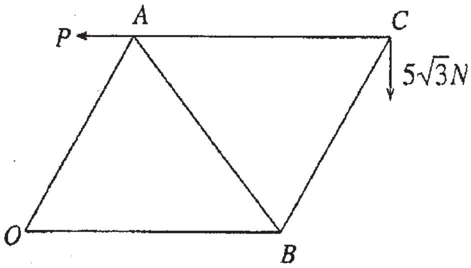
காவிகள் தொடர்பாக ஆரம்ப எண்ணக்கருவை நிறுவ முடியாமையினால் கேத்திர கணித அறிவைப் பயன்படுத்தும் திறமை குறைவென்பதை மாணவர்களின் விடைகளில் இருந்தது காண முடிந்தது. காவிகள் தொடர்பான அடிப்படை எண்ணக்கருவை வெற்றிகொள்ளும் படியாக பயிற்சிகளைச் செய்வதன் மூலம் மிகவும் பொருத்தமாக அமையும்.

வினா 15

15. (*a*) ஒவ்வொன்றினதும் நிறை W ஆகவுள்ள AB, AC என்னும் இரு சீரான சம கோல்கள் A யிலே சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை B, C ஆகிய முனைகள் ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்துள்ள இரு ஒப்பமான தளங்களின் மீது B, C ஆகிய முனைகள் இருக்குமாறு கோல்கள் ஒரு நிலைக்குத்துக்குத் தளத்திலே நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன; BC ஆனது கிடையாக இருக்கும் அதே வேளை BC யிற்கு மேலே A உள்ளது. B யில் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

$\tan\theta > 2\tan\alpha$ எனின், இழையின் இழுவை $\frac{1}{2}W(\tan\theta - 2\tan\alpha)$ எனக் காட்டுக; இங்கு $B\hat{A}C = 2\theta$. மூட்டு A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

(*b*) OA, OB, AC, AB, BC என்னும் ஐந்து இலேசான சம கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல் O இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை Cயில் $5\sqrt{3}$ நியூற்றன் நிறையைக் காவுகின்றது. OB கிடையாக இருக்குமாறு A யில் P நியூற்றன் என்னும் ஒரு கிடை விசையினால் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது.



(i) P யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) O இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

(iii) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி, சட்டப்படலிற்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் காண்க.

(a) ஒவ்வொரு கோலினதும் நீளம் $2a$ என்க.
நிலைக்குத்தாக விசைகளைத் துணிக்க.

$2R\cos\alpha = 2W \Rightarrow R = W\sec\alpha$

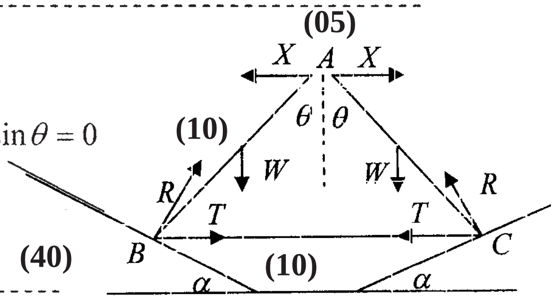
(05) **(05)** **[10]**

கோல் AB இன் சமநிலைக்கு இடஞ்சுழியாக A பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$T.\,2a\cos\theta + R\sin\alpha.\,2a\cos\theta + Wa\sin\theta - R\cos\alpha.\,2a\sin\theta = 0$

$2T. + 2W\tan\alpha. + W\tan\theta - 2W.\tan\theta = 0$ **(10)**

$T. = \frac{W}{2}(\tan\theta. - 2\tan\alpha)$ **(05)** **(40)**

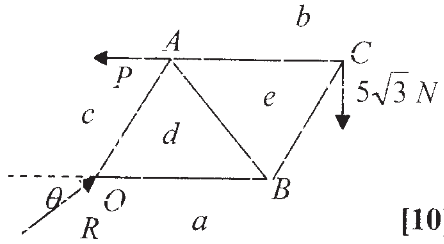


கோல் AB இன் சமநிலைக்கு இடஞ்சுழியாக B பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.

$X.2a\cos\theta - Wa\sin\theta = 0$. **(05)**

$i.e., X = \frac{W}{2}\tan\theta$ **(05)** **[10]**

(*b*) யாதேனும் ஒரு கோலின் நீளத்தை $2a$ என்க.
O பற்றிய திருப்புதிறன் எடுக்க.



$$P.2a\sin\frac{\pi}{3} - 5\sqrt{3}.\left\{2a + 2a\cos\frac{\pi}{3}\right\} = 0 \quad \textbf{(05)}$$

$P = 15\,\mathrm{N}$. **(05)** **[10]**

O இல் உள்ள மாறுதாக்கம் R எனவும் கிடையுடன் R அமைக்கும் கோணம் $\emptyset$ எனவும் கொள்க.
நிலைக்குத்தாக விசைகளைத் துணிக்க.

$R\sin\theta = 5\sqrt{3}$. **(05)**

கிடையாக விசைகளைத் துணிக்க.

$R\cos\theta = P = 15$. **(05)**

$R = \sqrt{75 + 225} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\mathrm{N}$. **(05)**

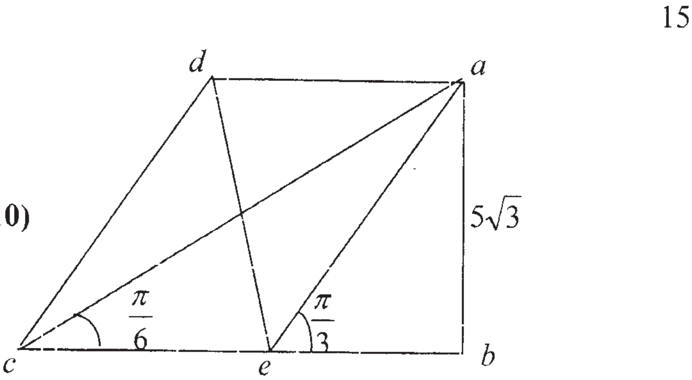
$$\tan\theta = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad \textbf{(05)}$$

[20]

எனவே O இல் மறுதாக்கம் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

தகைப்பு வரிப்படம் :

(10)

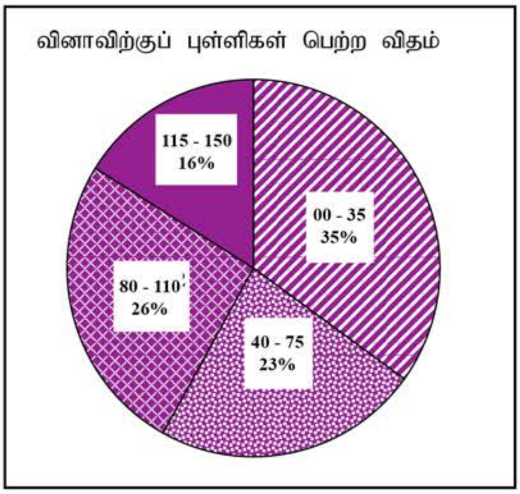


[10]

கோல்	தகைப்பு	பருமன்
OA	உதைப்பு	10N
OB	உதைப்பு	10N
AC	இழுவை	5N
AB	இழுவை	10N
BC	உதைப்பு	10N

(25) **(25)** **[50]**

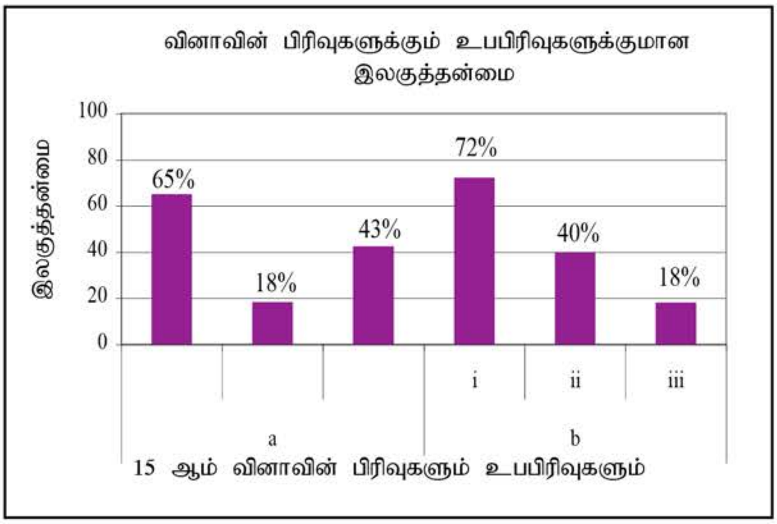
15 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 90.1% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 35%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 23%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 26%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 16%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கு 6 உபபிரிவுகள் உள்ளதோடு இரு உப பகுதிகளின் இலகுத்தன்மை 40% இலும் குறைவாகக் காணப்பட்டது. அவற்றுள் அந்த குறைந்த இலகுத்தன்மை 18% மாக காணப்பட்டது. கூடிய இலகுத்தன்மை காணப்பட்டது (b) (i) எனும் உபபகுதியாவதுடன் அது 72% ஆகும்.

15 பொதுவாக அதிகமானவர்களால் தெரிவு செய்யப்பட்ட வினாவாகும். பொதுவாக புள்ளிகள் பெறுவது அதிக திருப்திகரமானது.

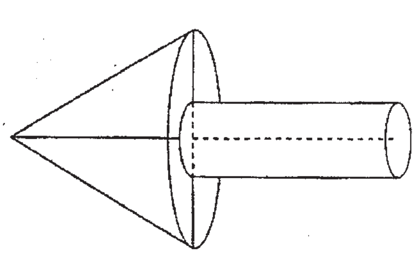
(a) சரியான விசைப்படங்களை வரைந்தும் முறைமைகளில் சமநிலையைக் கருதி விசைகளைக் குறிப்பதன் மூலம் வினாவிற்கு விடை அளிப்பது மிகவும் இலகுவாக்க முடிந்தது.

(b) போயினது குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் முழு விளையுள் விசை படத்தை சரியாக கீறுவதன் மூலம் வரிப்படத்தில் இழுவை மற்றும் உதைப்பை சரியாக குறிப்பதன் மூலம் அந்தத் தகவல்களை சரியாக அட்டவணையில் காட்டுவதனால் ஒன்றுக்கொன்று சார்பாக தகவல்களை ஒப்பிட்டு கவனத்திற் கொள்வதனால் மேலுள்ள புள்ளிகளின் அளவை இலகுவாக பெற்றுக் கொள்ளக் கூடிய பிரசினமாகும்.

தரப்பட்ட தகவல்களை நன்கு விளங்கிக் கொண்டு சரியான விசைப்படத்தை சரியாக கீறி அதற்காக க.பொ.த. சாதாரண தரமட்டத்தில் கேத்திர கணித அறிவை பரவலாக மாணவர்களுக்கு பெற்றுக்கொடுக்க வேண்டும்.

வினா 16

16. உயரம் h ஐ உடைய ஒரு சீரான திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு மையம், அதன் சமச்சீரச்சு மீது, கூம்பின் அடியிலிருந்து தூரம் $\frac{1}{4}h$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

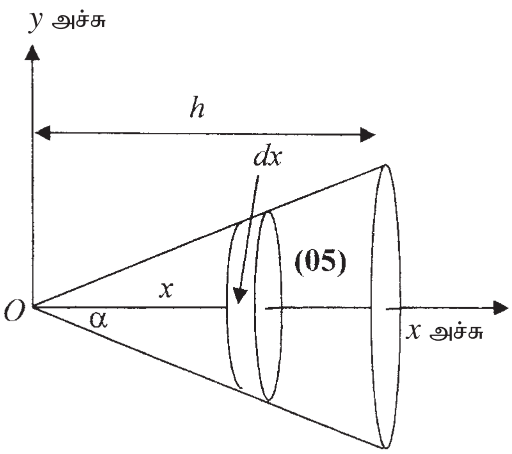


உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சீரான திண்மச் சேர்த்திப் பொருள் ஒருமிக்க நிலைப்படுத்தப்பட்ட அடி ஆரை $3r$ ஐயும் உயரம் h ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பையும் ஆரை r ஐயும் உயரம் $2h$ ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளையையும் கொண்டுள்ளது. சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையம், அதன் சமச்சீரச்சு மீது, கூம்பின் உச்சியிலிருந்து தூரம் $\frac{5}{4}h$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

ஒரு நுனி ஒரு சீலிங்குடனும் மற்றைய நுனி கூம்பின் வட்ட அடியின் பரிதி மீது உள்ள ஒரு புள்ளி A யிலும் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையினால் சேர்த்திப் பொருள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே சுயாதீனமாகத் தொங்கிக்கொண்டு இருக்கின்றது.

சேர்த்திப் பொருளின் சமச்சீரச்சு கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் α வை ஆக்குமெனின், $\tan\alpha = \frac{12r}{h}$ எனக் காட்டுக.

கூம்பின் உச்சியில் சேர்த்திப் பொருளின் சமச்சீரச்சு வழியே ஒரு விசை P யைப் பிரயோகிப்பதன்மூலம் சேர்த்திப் பொருளின் சமச்சீரச்சு கிடையாக இருக்குமாறு சேர்த்திப் பொருள் நாப்பத்தில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. விசை P யையும் இழையின் இழுவையையும் W, α ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க; இங்கு W ஆனது சேர்த்திப் பொருளின் நிறையாகும்.



சமச்சீரினால் திண்ம கூம்பின் புவியீர்ப்புமையம் சமச்சீர் அச்சில் இருக்கும் **(05)**
உச்சிய O இலிருந்து திண்மக் கூம்பின் ஈர்ப்பு மையம் $\bar{x}$ தூரத்தில் உள்ளது என்க.
ρ திண்மக் கூம்பின் அடர்த்தி என்க.

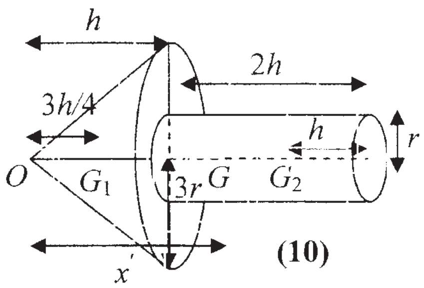
$$\frac{1}{3}\pi(h\tan\alpha)^2 h\rho\,\bar{x} \quad \textbf{(05)}$$

$$= \int_0^h \pi(x\tan\alpha)^2 x\rho\,dx \quad \textbf{(15)}$$

$$i.e.\ \frac{1}{3}h^3\,\bar{x} = \int_0^h x^3\,dx = \frac{h^4}{4} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{3}{4}h.\ \textbf{(05)}$$

எனவே துணிக்கையின் ஈர்வை மையம் சமச்சீர் அச்சின் வழியே அடியிலிருந்து $\frac{1}{4}h$ இல் இருக்கும் **(05)** **[40]**

சமச்சீரினால் திண்ம செவ்வட்ட உருளையின் திணவுமையம் சமச்சீர் அச்சு வழியே கூம்பின் உச்சி O இலிருந்து $2h$ தூரத்தில் இருக்கும் **(05)**



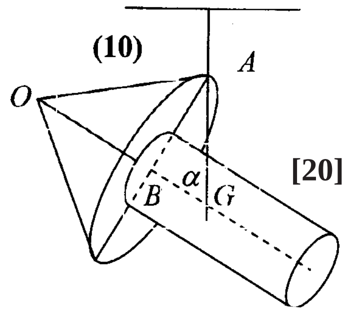
முதல் பகுதியிலிருந்து திண்மக் கூம்பின் திணிவுமையம் கூம்பின் உச்சி O இலிருந்து சமச்சீர் அச்சு வழியே $\frac{3}{4}h$ தூரத்தில் இருக்கும் **(05)**

சேர்த்தி உடலின் திணிவு மையம் சமச்சீர் அச்சு வழியே கூம்பின் உச்சி O இலிருந்து x தூரத்தில் உள்ளது.

$$\left(\pi r^2(2h)+\frac{1}{3}\pi(3r)^2h\right)\rho x'=\left(\pi r^2(2h)\right)(2h)\rho+\left(\frac{1}{3}\pi(3r)^2h\right)\rho\left(\frac{3h}{4}\right)$$

(10) **(05)** **(05),** **(05)**சரியான சமன்பாட்டுக்கு **[50]**

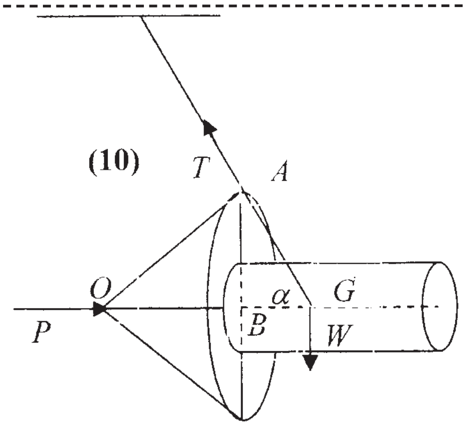
$5x'=4h+\frac{9}{4}h\Rightarrow x'=\frac{5}{4}h$ **(05)** **[50]**



[20]

$AB=3r$, $BG=OG-OB=\frac{5h}{4}-h=\frac{h}{4}$ **(05)**

$\tan\alpha=\frac{AB}{BG}=\frac{12r}{h}$ **(05)**



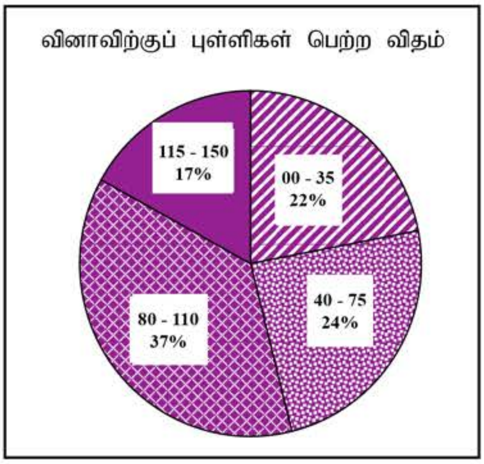
இலாமியின் தேற்றத்தை பிரயோகிக்க

$$\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{T}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{W}{\sin(\pi-\alpha)}$$ **(15)**

$$\frac{P}{\cos\alpha}=T=\frac{W}{\sin\alpha}$$ **(05)**

$P=W\cot\alpha$ **(05)** , $T=W\operatorname{cosec}\alpha$ **(05)** **[40]**

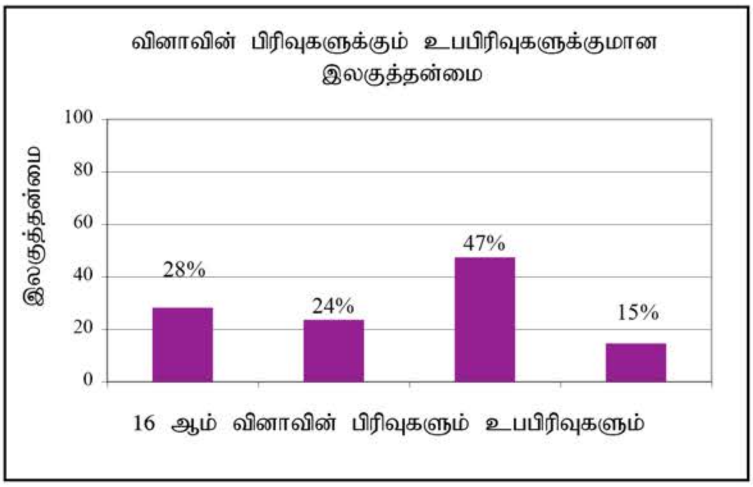
16 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 71.7% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 22%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 24%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 37%
115 - 150 புள்ளி ஆயிடையில் 17%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கு 4 உபபகுதிகள் உள்ளதோடு அதில் ஒரு பகுதியினதும் இலகுத்தன்மை 50% த்தினை விட கூடியிருக்கவில்லை. கூடுதலான இலகுத்தன்மை காணப்பட்டது மூன்றாவது உபபகுதியாவதுடன் அதன் இலகுத்தன்மை 47% ஆகும். குறைந்த இலகுத்தன்மை இறுதி உபபகுதியாவதோடு அதன் இலகுத்தன்மை 15% மட்டும் ஆகும்.

16 குறைவானோர் தெரிவு செய்துள்ள வினாவாகும். திண்மக் கூம்பினது திணிவு மையத்தைப் பெறுவது போன்று திண்ம சேர்த்திப் பொருளினது திணிவு மையத்தினது அமைவிடத்தைப் பெறுவதும் வகுப்பறையிலே செயன்முறையின் கீழ் கலந்துரையாடப்பட்டு பெறப்படுவதன் மூலம் முழு புள்ளிகளைப் பெறக் கூடிய வினாவாகும். தொடரில்லாத திண்ம முறைமைகளின் திணிவு மையத்தைக் காணும் போது இவற்றை ஒவ்வொன்றாகக் கூட்டுவது எனும் கருத்தில் Σ குறியீடு பயன்படுத்தி கூட்டுத்தொகையை காட்டுதல் தனி அடர் ஒன்றிற்காக உண்மையாவதுடன் அதற்காக எல்லையாக பூச்சியத்தை அடையும் மெல்லிய வட்ட தட்டடினது கூட்டுத்தொகை என்பதன் அர்த்தம் Σ பயன்படுத்துதல் என்பதை தெரியாது சாதாரண தொடரில்லாத பகுதிக்காக δx இனை முடிவிலிக்கு குறிப்பதன் மூலம் புள்ளிகளைப் பெற்றிருந்தனர். எவ்வாறெனினும் வினாவின் முதல் பகுதிக்கு கூடிய புள்ளிகளை பெற்றிருந்தாலும் அடரானது சுயாதீனமாக தொங்கும் போது சமநிலையில் காணப்படும். அடரின் விசை உருப்படத்தில் கேந்திர புள்ளியை குறிக்குமாறு சரியாக வரைந்து காட்ட தவறியுள்ளமையால் திருப்தியாக இறுதி விடையை அண்மிக்காத சந்தர்ப்பங்களை அதிகமாக காணமுடிந்தது. இதனால் வினாவின் இறுதி பகுதியின் இலகுத்தன்மை 30% வரை குறைந்த மட்டத்தில் காணப்பட்டது.

வரையறுத்தலைச் சரியாக விளங்கிக் கொள்ளாது இருந்தமை திண்ம அடர்களின் திணிவு மையத்தைக் காணும் போது $\sum_{i=1}^{n}$ இனைப் பயன்படுத்தி பல்வேறு முறைகளில் கூட்டுத்தொகையை கருதி தரப்பட்ட படத்தில் அமைவை குறிக்காமை தெளிவாகத் தெரிந்தது. திண்ம பொருட்களின் திணிவு மையத்தைக் காண்பதற்காக சரியான சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவதற்கு பழக்கப்படுதல் கூட்டு திண்மத்தின் பரப்பளவு, கனவளவுக்கான சூத்திரங்கள் தொடர்பான அறிவை வழங்க நடவடிக்கை எடுத்தல் அவசியமாக மேலும் கிடை, நிலைக்குத்தாக குறிக்கும் முறையையும் பழக்கப்படுத்த வேண்டும்.

வினா 17

17. (*a*) ஒரு பையில் இயல்பொத்த 5 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் 7 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. பையிலிருந்து பிரதிவைப்பு இல்லாமல் மூன்று பந்துகள் எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்றன.

(i) எல்லா மூன்று பந்துகளும் கறுப்புப் பந்துகளாக இருப்பதற்கான,

(ii) அம்மூன்று பந்துகளில் எதுவும் வெள்ளைப் பந்தாக இராமைக்கான,

(iii) குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்தேனும் வெள்ளைப் பந்தாக இருப்பதற்கான,

(iv) பந்துகள் வெவ்வேறு நிறங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான,

(v) அம்மூன்று பந்துகளும் கறுப்பு, சிவப்பு, வெள்ளை என்னும் வரிசையில் எடுக்கப்படுவதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) ஒரு குறித்த வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களுக்குப் புள்ளிவிவரவியலிலான ஒரு வினாத்தாள் கொடுக்கப் படுகின்றது. இம்மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வரும் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

புள்ளி வீச்சு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
00 – 20	14
20 – 40	f_1
40 – 60	27
60 – 80	f_2
80 – 100	15

அட்டவணையில் 20 – 40, 60 – 80 என்னும் புள்ளி வீச்சுகளின் மீடிறன்கள் தவறியுள்ளன. எனினும் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் ஆகாரமும் இடையமும் முறையே 48, 50 என அறியப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணையில் இரு தவறியுள்ள மீடிறன்களையும் கணிக்க.

இதிலிருந்து, புள்ளிவிவரவியல் வினாத்தாளுக்குத் தோற்றிய மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைப் பெறுக.

கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

(a) (i) $P(BBB) = P(B)P(B \mid B)P(B \mid BB) = \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{455}$

(05) **(10)** **(05)** **[20]**

அல்லது, $P(BBB) = \frac{{}^{3}C_3}{{}^{15}C_3} = \frac{3!}{15 \times 14 \times 13} = \frac{1}{455}$

(10) **(05)** **(05)** **[20]**

(ii) $'(W'W'W') = P(W')P(W' \mid W')P(W' \mid W'W') = \dfrac{10}{15} \times \dfrac{9}{14} \times \dfrac{8}{13} = \dfrac{24}{91}$

(05) **(10)** **(05)** **[20]**

அல்லது $P(W'W'W') = \dfrac{^{10}C_3}{^{15}C_3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{15 \times 14 \times 13} = \dfrac{24}{91}$

(10) **(05)** **[20]**

(iii) P (குறைந்தது ஒரு வெள்ளைப் பந்தேனும் இருத்தல்)

$= 1 - P$ (மூன்றும் வெள்ளைப் பந்தாக இராமை) **(05)**

$= 1 - \dfrac{24}{91} = \dfrac{67}{91}$

(05) **(05)** **[15]**

(iv) P (பந்துகள் பல்வேறு நிறங்கள்) $\dfrac{^5C_1 \times {}^3C_1 \times {}^7C_1}{^{15}C_3} = \left(\dfrac{5 \times 3 \times 7}{15 \times 14 \times 13}\right) 3! = \dfrac{3}{13}$

(05) **(05)** **(05)** **[15]**

(v) $P(BRW) = P(B)P(R \mid B)P(W \mid BR) = \dfrac{3}{15} \times \dfrac{7}{14} \times \dfrac{5}{13} = \dfrac{1}{26}$

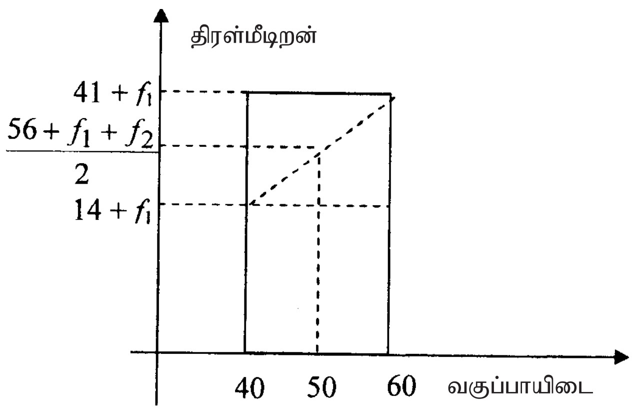
(05) **(05)** **[10]**

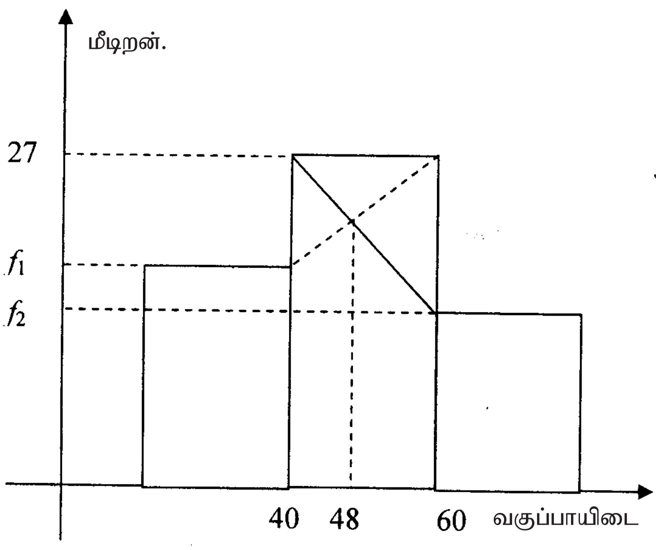
(b) இடையம் = 50 இடைய வகுப்பு 40 – 60

$14 + f_1 + \dfrac{27}{20} \times 10 = \dfrac{56 + f_1 + f_2}{2}$ **(10)**

$28 + 2f_1 + 27 = 56 + f_1 + f_2$

$f_1 - f_2 = 1 \rightarrow (1)$ ஆகும்.





ஆகாரம் = 48 ∴ ஆகார வகுப்பு 40 – 60

$\dfrac{27 - f_1}{27 - f_2} = \dfrac{48 - 40}{60 - 48} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ **(10)**

எனவே $3f_1 - 2f_2 = 27 \rightarrow (2)$ ஆகும்.

(1) , (2)

$f_1 = 25$ **(05)** , $f_2 = 24$ கிடைக்கும் **(05)**

[30]

புள்ளிவிவரவியல் வினாத்தாளுக்கு தோற்றிய மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை

$= 56 + f_1 + f_2 = 56 + 25 + 24 = 105$ **(05)** **[05]**

வகுப்பாயிடை	நடுப்பெறுமானம் (x)	மீடிறன் (f)	$d = \dfrac{x-50}{20}$	fd	fd^2
00 - 20	10	14	-2	-28	56
20 - 40	30	25	-1	-25	25
40 - 60	50	27	0	0	0
60 - 80	70	24	1	24	24
80 - 100	90	15	2	30	60
	மொத்த எண்ணிக்கை	105		1	165

(05) **(05)**

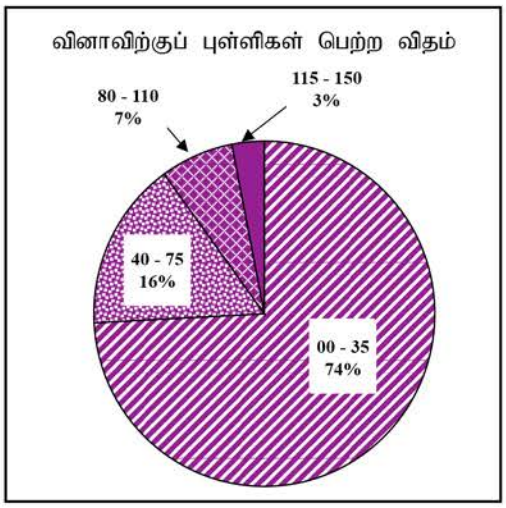
இடை $= 50 + 20\bar{d} = 50 + 20 \times \dfrac{1}{105} = 50 + \dfrac{4}{21} = 50.19$ ஆகும். **(05)** **[10]**

மாறல் திறன் $= 20^2 \left\{ \dfrac{1}{105} \sum_{i=1}^{5} f_i d_i^2 - \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{5} f_i d_i}{105} \right)^2 \right\} = \left(\dfrac{20}{105}\right)^2 (165 \times 105 - 1) = 17324 \left(\dfrac{4}{21}\right)^2$

(05) **(05)** **(05)**

நியம விலகல் $= \dfrac{4}{21}\sqrt{17324} = \dfrac{4 \times 131.62}{21} = 25.07$ ஆகும். **(05)** **[25]**

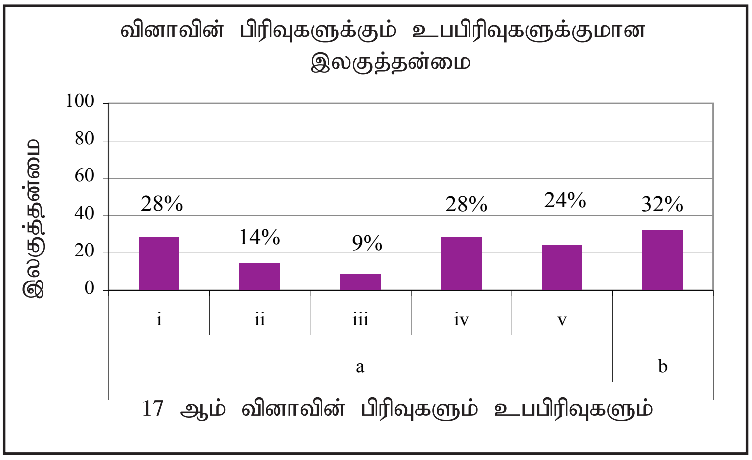
17 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்



இவ்வினாவை 54.1% ஆனவர்களே தெரிவு செய்துள்ளனர். இவ்வினாவிற்கான மொத்தப் புள்ளிகள் 150 ஆகும்.

00 - 35 புள்ளி ஆயிடையில் 74%
40 - 75 புள்ளி ஆயிடையில் 16%
80 - 110 புள்ளி ஆயிடையில் 7%
115- 150 புள்ளி ஆயிடையில் 3%

ஆனவர்கள் புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர்.



இங்கு 6 உபபகுதிகள் உள்ளதோடு அதன் ஒரு பகுதியினது இலகுத்தன்மையாவது 32% இனை விடக் கூடி இருக்கவில்லை. கூடிய இலகுத்தன்மை காணப்படுவது இறுதி (b) பகுதியாவதுடன் அது 32% இற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருந்தது. குறைவான இலகுத்தன்மை இருந்தது (a) (iii) ஆவது உபபகுதியாவதுடன் அது 9% ஆகும்.

17 (a) அதிகளவிலானோர் தெரிவு செய்யப்பட்ட வினாவாயினும் மாணவர்களால் வினாவைச் சரியாக விளங்கிக் கொள்ளாமையினால் நிகழ்தகவு தொடர்பான பெருக்கல் விதியை சரியாகப் பயன்படுத்தாமையினாலும் இறுதி விடையை சுருக்காமையினாலும் பெருமளவிலான புள்ளிகள் குறைவடைந்ததைக் காண முடிந்தது.

(b) புள்ளிவிபரவியலின் பாவனை தொடர்பான அறிவு குறைவினால் ஆகாரம் மற்றும் இடை தொடர்பான சூத்திரம் மற்றும் பிரயோகங்களை சரியாகப் பயன்படுத்தாமையினால் பெருமளவிலான புள்ளிகள் இல்லாது போனதைக் காண முடிந்தது.

எழுமாற்று சந்தர்ப்பங்களின் சம்பவங்களை அறிந்து கொள்வதற்காக சரியான அட்சரகணித சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல் சுயாதீன நிகழ்வு நடைபெறும் நிகழ்தகவைக் கணித்தலுக்கான பெருக்கல் சமன்பாட்டை சரியாகப் பயன்படுத்துதல். விடைகளைப் பெற்றுக்கொள்ளும் படிமுறைகளைப் பயன்படுத்துதல் விடைகளைப் பெற்றுக்கொள்ளும் படிமுறைகளைக் குறிப்பிடல் மைய நாட்ட அளவைகள் மற்றும் மாறல்கள் தொடர்பான அளவுகளுக்காக சூத்திரத்தை பரவலாக பயன்படுத்துதல் போன்ற விடயங்களில் கூடிய அவதானங்களைச் செலுத்துவதன் மூலம் அந்த அளவுகள் தொடர்பான சூத்திரங்களை நினைவில் வைத்திருத்தலுக்கு பொருத்தமான பயிற்சிகளை மாணவர்களுக்கு தொடர்ந்து வழங்குவது அவசியமாகும்.

பகுதி III

3. விடையளிக்கும் போது அவதானிக்க வேண்டிய விடயங்களும் ஆலோசனைகளும்

3.1 விடையளிக்கும் போது அவதானிக்க வேண்டிய விடயங்கள்

பொது அறிவுறுத்தல்கள்

- ★ வினாத்தாளில் உள்ள அடிப்படை அறிவுறுத்தல்களை நன்றாக வாசித்து விளங்கிக் கொள்ளல் வேண்டும். அதாவது ஒவ்வொரு பகுதியிலும் என்ன எண்ணிக்கையான வினாக்களுக்கு விடை அளிக்க வேண்டும். எந்த வினாக்கள் கட்டாயமானவை , எவ்வளவு புள்ளிகள் கிடைக்கும், எவ்வளவு நேரம் உள்ளது போன்ற விடயங்கள் தொடர்பாக கவனமாக இருக்க வேண்டியதுடன் வினாவை நன்கு வாசித்து தெளிவான விளக்கத்தை பெற்றுக்கொள்ளக் கூடிய வினாவைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.
- ★ வினாத்தாள் I, II இன் A பகுதிகளின் சகல வினாக்களுக்கும் விடை அளித்தல் வேண்டும்.
- ★ வினாத்தாள் I, II இன் B பகுதிகளின் 7 வினாக்களில் 5 வினாக்களைத் தெரிவு செய்து விடை எழுத வேண்டும்.
- ★ ஒவ்வொரு வினாக்களையும் புதிய பக்கத்தில் ஆரம்பிக்க வேண்டும்.
- ★ மாணவர்கள் தமது சுட்டெண்களை ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் உரிய இடத்தில் எழுத வேண்டும்.
- ★ வினா எண், பகுதி வினா எண்களை சரியாக எழுத வேண்டும்.
- ★ எல்லா வினாக்களையும் நன்கு வாசித்து விடை எழுத வேண்டும். விடைகளின் கீழ் தரப்பட்டுள்ள தகவல்கள் பெறக்கூடிய விடைகள் அல்லது நிறுவக்கூடிய பெறுபேறுகள் எவ்வாறானவை என்பவற்றை தெளிவாக் விளங்கிக் கொள்ள வேண்டும்.
- ★ வினாக்களுக்கு விடை எழுதும் போது இருக்கும் நேரத்தை சரியான வகையில் முகாமைத்துவம் செய்து கொள்ள வேண்டும்.
- ★ விடைகள் எழுதும் போது சிவப்பு, பச்சை, ஊதா நிற பேனாக்களைப் பாவிப்பதைத் தவிர்க்க வேண்டும்.

விசேட அறிவுறுத்தல்கள்

- ★ படங்கள் வரைய வேண்டிய சந்தர்ப்பங்களில் அவற்றை மிகவும் தெளிவாக வரைந்து பெயரிட வேண்டும். படங்களின் திருத்தத்தன்மை, தொடர்புகளைக் காண்பதற்கும் அவற்றின் மூலம் இலகுவில் விடையைப் பெற்றுக்கொள்ள முடியும்.
- ★ கணிப்பீடுகளில் ஒவ்வொரு படிமுறைகளையும் தெளிவாகக் குறிப்பிட வேண்டியதுடன் தேவையான இடங்களில் படிமுறைகளிடையேயான தொடர்பைக் காட்டும் சமனான புள்ளி அல்லது வேறு குறியீடுகளை எழுதிக்காட்டுவதில் கவனம் செலுத்த வேண்டும். ஒரு படிமுறையில் அல்லது பக்கத்தில் உள்ள கூற்று மற்றும் சமன்பாடுகள் அடுத்த படிமுறைக்கு அல்லது பக்கத்திற்குப் பிரதி செய்யும் போது அவற்றின் சரியான தன்மை தொடர்பாக கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.
- ★ தேவையான இடங்களில் சரியான அலகுகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.
- ★ வரைபுகள் கீறும்போது X, Y அச்சுகளை சரியாகப் பெயரிட்டு அளவிடை செய்யப்பட வேண்டும். தேவைப்படும் போது அலகுகளைக் குறிப்பிட வேண்டும்.
- ★ அடிப்படை சமவிகிதம் தொடர்பான எண்ணக்கருக்களை மீண்டும் பரிசீலிக்க வேண்டும்.

உதாரணம் : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ எனின்

(i) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

(ii) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

(iii) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$

★ அடிப்படை கேத்திர கணித அறிவை மீண்டும் பரிசீலிக்க வேண்டும்.
உதாரணம் : (1) இணைகரத்தின் பண்புகள்
(2) சாய்சதுரத்தின் பண்புகள்
(3) ஒழுங்கான பல்கோணியின் பண்புகள்
(4) மைய எல்லைத் தேற்றம் மற்றும் மறுதலை
(5) வட்டம் தொடர்பான தேற்றங்கள்
(6) சமச்சீரான பண்புகள்

★ காரணிகளுக்கு வேறாக்கக் கூடிய இருபடிக் கோவையை ஒரே முறையில் வேறாக்கக் கூடிய திறமையைப் பயிற்றுவிக்க வேண்டும்.

★ அவ்வாறெனில் விடுவித்தல், உறுதிசெய்தல், பெற்றுக்கொள்ளல் போன்ற பதங்களை கவனமாகக் கொள்ள வேண்டியதுடன் அதற்கேற்ப விடையை பெறுவதற்கு முயல வேண்டும். “அவ்வாறே அல்லது மாற்று முறைகளில்” என்பதைக் குறிப்பிடும் சந்தர்ப்பங்களில் பரவலாக முன்னர் பெற்ற பெறுபேற்றைப் பாவித்து விடையைப் பெறுதல் சிறந்தது,

★ எப்போதும் இறுதி விடையை எளிய முறையில் காட்டுவதற்கு கவனத்தைச் செலுத்த வேண்டும்.இறுதி விடையை வினாவில் வினவப்பட்டுள்ள முறைக்கேற்ப தெளிவாகக் காட்டப்பட வேண்டும்.

★ மாணவர்கள் தமது கையெழுத்து இலக்கம் மற்றும் குறியீடுகளை தெளிவாகவும் சரியாகவும் எழுதிக்காட்டுவதற்கு கவனத்தைச் செலுத்த வேண்டும்.

★ விடையைப் பெறுவதற்கு ஏற்ப தேவையான சுருக்குதல்களை மேற்கொள்ளல் (எண்சார்ந்த, அட்சரகணித அல்லது திரிகோண கணித) செய்கை முறையாக கருதி விடைகளுடன் இறுதியில் ஒப்படைக்கவும்.

★ விடையைப் பூரணப்படுத்த முடியாத சந்தர்ப்பமாயினும் வினாவிற்கு விடை பெற்றுக்கொள்வதற்கு தேவையான உரிய எஞ்சிய படிமுறைகளை எழுதிக் காட்டுவதற்கு கூடுதலான திறமை இருக்க வேண்டும்.

★ வினாவின் இறுதிப் புள்ளிகளை விட ஆரம்ப பகுதிகளில் சுயாதீனமாக இலகுவான பகுதிகள் இருக்கக் கூடிய வினாக்களில் முதல் பகுதி தெளிவில்லாது விடின் வினாவை கைவிட்டுவிடாது எஞ்சிய பகுதிகள் தொடர்பாக அவதானம் செலுத்த வேண்டியது அவசியமாகும்.

3.2 கற்றல் கற்பித்தல் தொடர்பான கருத்துகளும் ஆலோசனைகளும்

- ★ பாடத்திட்டம், ஆசிரியர் வழிகாட்டல் கைநூல், வெளிவளங்களின் பயன்பாடு தொடர்பாக ஆசிரியர்களைப் போல மாணவர்களையும் அறிவுறுத்துவது மற்றும் பயன்படுத்துவது அவசியமாகும்.

- ★ மற்றும் பாட அறிவை புதுப்பிப்பதற்கும் விருத்தி செய்து கொள்வதற்கும் ஆசிரியர்கள் கவனம் செலுத்த வேண்டும்.

- ★ இணைந்த கணிதம் போன்ற பாடங்களைக் கற்றல் பரீட்சை மையத்தைக் கொண்டிராத போதும் பரீட்சைகளில் பயன்படுத்தப்படும் வினாத்தாள்களில் உயர்ந்த புள்ளிகளைப் பெற வேண்டுமெனின் மாதிரி வினாக்களைப் போன்று கடந்த வருடங்களின் வினாத்தாள்கள் மற்றும் புள்ளியிடும் திட்டங்களைப் பரீட்சித்து ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் மிகவும் சிறந்த விடையை எழுதுவது எவ்வாறு என்பது தொடர்பாக மாணவர்களுள் நல்ல விளக்கத்தைப் பெற்றுக்கொடுக்க வேண்டும். இதற்காக மாணவர்களுக்கு முன்மாதிரியாக நடந்துகொள்வது ஆசிரியர்களின் பொறுப்பு என்பதை கவனத்திற் கொள்ள வேண்டும்.